

1.3 MKSA 有理単位系

ここでは、先にこのノートで用いる単位系について断っておく。初学者にとっていきなり単位系の話から始まって困ると思うが、電磁気学においては特に重要であり、単位系が異なると式の見え方が異なるため混乱する原因となるのである。実際に式 (1.1)–(1.4) の Maxwell 方程式や、高校物理でも扱う Coulomb (クーロン) の法則などをとって、他の教科書やサイトと比較すると若干見え方が異なる可能性がある*6。

このノートでは MKSA 有理単位系を採用するが、まずは MKSA 単位系から説明する。これは、電磁気学を論じる上で必要となる次の基本的な量の単位を定めている。

- 長さ [m] (メートル)
- 質量 [kg] (キログラム)
- 時間 [s] (秒、セカンド)
- アンペア [A] (アンペア)

それぞれの単位の頭文字をとって MKSA 単位系である。ここには、電荷の単位 [C] (クーロン) が含まれないが、上の単位を用いて $1 \text{ C} := 1 \text{ A} \cdot \text{s}$ によって与えられる。ちなみに、力学でよく用いる [N] (ニュートン) や [J] (ジュール) は、それぞれ $1 \text{ N} := 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ と $1 \text{ J} := 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ と表現できる。

物理の世界でも広く用いられる最も標準的な単位系として国際単位系 (SI) が定められている。SI では、一般に、物理量は次の 7 つの基本単位で構成される。

- 長さ [m] (メートル)
- 質量 [kg] (キログラム)
- 時間 [s] (秒、セカンド)
- アンペア [A] (アンペア)
- 熱力学温度 [K] (ケルビン)

*6 この単位系が異なるために混乱する問題は、物理学を学ぶ上で避けては通れない。実は、筆者がこのようにノートを自分で書くようになったきっかけがこれである。例えば、複数の教科書やサイトを見ながら勉強していると、ある教科書を見ながら計算を進めて、分からなくなって他の教科書を参照することがある。「ああ、この方程式をこうやって変形すると前の教科書の式になるのか」となって行ったり来たりしているうちに、この 2 つの教科書で「全く同じはずの式の符号が互いに異なっている！」とか「係数の 4π がない！」となり得る。こうなってしまったときに、比較を始めた段階まで戻ればよいが、それでは数時間どころか数日単位でかかるような場合もあるわけである。このような現象の多くは、単位系や定義の仕方が異なることに起因する。この問題と縁を切るために、筆者は自分の notation (記法、単位系、定義) を決めておくことにした。すると、教科書やサイトを見るときに、自分の定義を絶対的な参照元として比較して適宜読み替えることができる。読者にとっては必ずしもこのノートの notation が親しみやすいわけではないと思うが、どの単位系を採用しているのかを先に把握しておくことは重要だということを認識しておいてほしい。

- 物質量 [mol] (モル)
- 光度 [cd] (カンデラ)

前半4つに着目すると、MKSA 単位系と共通していることが分かる。すなわち、MKSA 単位系は、SI のうち電磁気学に関係するものだけ抜粋したものだといえる。ここまでは受け入れやすいだろう。

次に、これを少し改良した MKSA 有理単位系について説明する。これは、Maxwell 方程式などの電磁気学に現れる基本的な方程式系を簡潔にする目的で導入される。具体的には 4π の係数をどこにおくかが問題となる。次章から具体的な説明に入るが、電荷 q と Q をもつ2つの点電荷が距離 r 離れて存在するとき、それらの電荷間にはたらく Coulomb 力は、MKSA 有理単位系では次のように表す。

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \quad (1.5)$$

ここで、 $1/(4\pi\epsilon_0)$ は定数であるから、重要なのは $F_C \propto \frac{qQ}{r^2}$ ということである*7。これは実験事実なので、単純に考えれば適当な係数 k を用いて、 $F_C = k \frac{qQ}{r^2}$ とすれば十分である。実際、高校物理ではこの形で教わるかもしれない。しかし、このまま議論を進めていくと、より本質的に電磁気学を表現できる Maxwell 方程式に辿り着いたときに空間が3次元であることを反映して 4π という因子があちこちに現れる。これが現れないようにしたのが MKSA 有理単位系である。ちなみに、有理というのは、無理数である π を消したからそのように名付けられている*8。MKSA 有理単位系の副作用として、最初に登場する最もシンプルな電磁気学法則である Coulomb の法則に 4π の因子が追加されてしまう。

ちなみに、他に CGS ガウス単位系、ローレンツヘヴィサイド単位系など様々な種類のものがある。これは単に基準の違いであって、何を基準にしても相対関係が変わらなければ物理現象を説明する上で矛盾は生じない。多様な単位系が乱立するのは、先述の通り、電磁気学の応用範囲が広いことにも一因があり、自分たちが最も利用する方程式を簡潔にするように、余計な係数を他に押し付けているのである。どの単位系を採用するのかは、それぞれの教科書の著者の裁量である。

まとめると、MKSA 有理単位系では、SI と共通する m, kg, s, A の4つを基本単位とし、さらに Maxwell 方程式に 4π の係数が現れないように「有理化」して改良した単位系である。なるべくシンプルな方程式から実験結果を説明できるのが物理学における理想という考えから、筆者は電磁気学の基本方程式である Maxwell 方程式が美しくなる MKSA 有理単位

*7 $A \propto B$ は、A は B に比例する、という意味。

*8 念のため、有理数と無理数について説明しておく。数は複素数 \mathbb{C} 、実数 \mathbb{R} 、有理数 \mathbb{Q} 、整数 \mathbb{Z} などの種類がある。そのうち有理数とは、整数の比で表すことができる数である。すなわち、 $p, q \in \mathbb{Z}$ を用いて p/q ($q \neq 0$) と表せるものである。このように表せないものは無理数という。無理数として有名なものが、 $\sqrt{2}$ や、ここで議論した円周率 π なのである。

系を採用している。

1.4 その他の記法

その他に、このノートで用いる記法についてここでまとめておく。

ベクトルは太字で表現する。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (1.6)$$

ここで \mathbf{E} のベクトルは位置ベクトル \mathbf{x} と時刻 t に依存する量であることを明示的に表している。

多重積分については次のように表す。

$$\int \mathbf{E} d^3x := \int \int \int \mathbf{E} \, dx dy dz \quad (1.7)$$

ただし「:=」は左辺を右辺によって定義するという意味である。ここで、積分範囲を明示的に記入していない場合は、考えている全領域にわたる積分を意味する。

また、やや発展的な話になるため必要なときに詳述するが、 $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ 対応を採用する。ちなみに、これと対をなすものは $\mathbf{E}-\mathbf{H}$ 対応と呼ばれるものである。 $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ 対応は、電場と磁場を記述する際に \mathbf{E} と \mathbf{B} を基本的な場とする立場であり、式 (1.1)–(1.4) の Maxwell 方程式を見れば明らかのように \mathbf{H} は登場しない。これは単純な話ではなく、電場と磁場の本質に迫る深い議論にも繋がるため、改めて後述する。そもそも、電場と磁場が何かということは次章から説明を始める。

この他に、このノートで用いる記法は随時ここに追記することとする。