

第 2 章

静電場

本章からいよいよ Maxwell 方程式の導出に向けて、電磁気学の本格的な議論に入る。前半部分の全体的な流れは次の通りである。

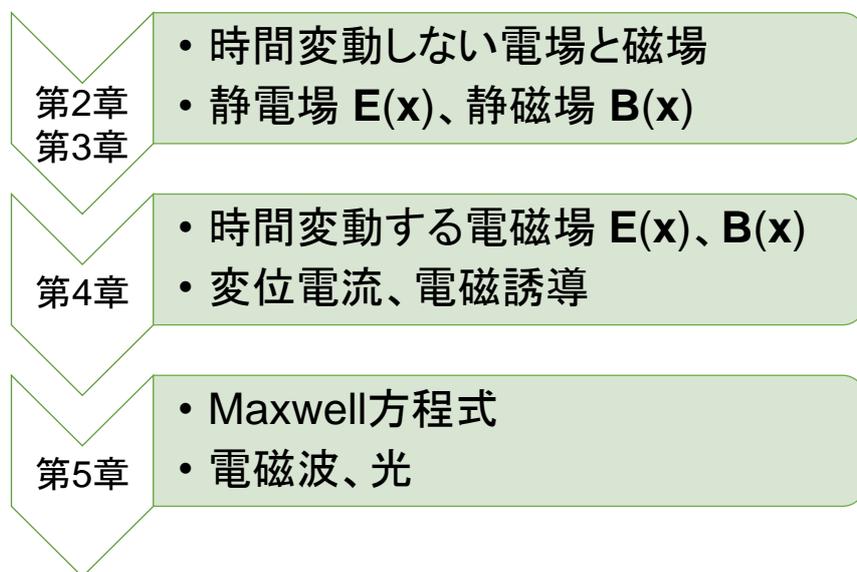


図 2.1 Maxwell 方程式導出までのフローチャート

まずは、時間変動しない静的な電場と磁場に限定して議論する。これはあとで見るように、時間変動する場合を考えると複雑になってしまうためである。はじめに第 2 章で静電場について扱い、第 3 章で静磁場について扱う。このときに、電気の力は電場によって、磁気の力については磁場によって、それぞれ記述できることを説明する。ここで物理学という学問全体でも非常に重要な考え方である「場の概念」についても説明する。ここまでの、完全ではないものの Maxwell 方程式に近いものが得られるが、この段階では電場と磁場がそれぞれ似ているが独立した方程式系となる。その後、第 4 章で時間変動する電場と磁場を考慮することで、変位電流と電磁誘導を学ぶ。これにより、電場と磁場が互いに影響を及ぼしあう

ことが理解でき、第5章で Maxwell 方程式が完成する。さらに Maxwell 方程式を整理すると、波動方程式が現れ、それは電磁波として伝播することが分かる。さらに、これこそが光であり、光速 c が理論的に与えられる。そこから、光速不変の原理に繋がり特殊相対性理論へ、ということになっていくのである。

また、この過程で物質中と真空中において、電場と磁場がどのように変わるかということについても適宜論じることになる。こちらは結果を見比べると一見簡単にも見えるが、非常に奥の深い話題であり、電磁気学の実用面においては特に重要な問題である。媒質が変わったときに、どのように場は変化するのだろうか、そしてそれはどのように記述するべきだろうか。媒質によって変わってしまうものが観測対象なので本質的だろうか (電場 E 、磁場 (または磁束密度) B)。それとも、媒質が変わっても背後で変わらない真の場が本質的だろうか (電束密度 D 、磁場の強さ H)。本ノートでは、先述の通り E - B 対応の立場をとっているのだが、なぜ媒質によらず一定な真の場ともいえる D 、 H を用いないのかは、納得するかは別にしてここで理解できるはずである。

2.1 電気の研究

電気の研究は古代から定性的なものではあったが続いており、有名な Coulomb の法則が登場する以前にも多くの発見があった。紀元前 600 年頃、ギリシャの哲学者 Thales (タレス) は琥珀をこすり合わせると軽い物体を引き寄せることを発見した。この現象は「琥珀効果」と呼ばれ、電気を意味する英語 “electricity” はギリシャ語で琥珀を意味する “ $\etaλεκτρον$ ” に由来する。その後、しばらく研究対象とはならなかったが、1600 年に W. Gilbert (ギルバート) が著書 “De Magnete (デ・マグネテ)” を発表し、磁気と静電気の違いを明確にした。Gilbert は琥珀以外にも、樹脂、硫黄、ガラス、水晶なども軽い物体を引き寄せる現象が見られることを発見した。更に Gilbert は、磁石が鉄を引き寄せるのとは異なり、琥珀が軽い物体を引き寄せる現象は電氣的なものであると説明した。

17 世紀に入ると、O. Guericke (ゲーリケ) が空気ポンプを発明し、真空中でも静電気の効果が発揮されることを示した。Guericke は硫黄球を使った摩擦起電機を開発し、電気を発生させる装置を初めて作成した。F. Hauksbee (ホークスビー) も摩擦起電機を改良し、電気の発生量を制御する方法を見つけた。この時期には、S. Gray (グレイ) が電気の伝導性に関する実験を行い、電気が物体を通じて伝わる性質を発見した。Gray は、導体と絶縁体の区別を初めて示し、導電性の概念を確立した。

18 世紀に入ると、C.F. de du Fay (デュフェイ) が電気を 2 種類の「電気流体」として捉え、ガラス摩擦による「ガラス電気」と樹脂摩擦による「樹脂電気」を提唱した。du Fay は、同種の電気は互いに反発し、異種の電気は引き合うという法則を発見した。この理論は後に B. Franklin (フランクリン) に影響を与え、Franklin は電気をプラスとマイナスの 2

つの電荷として統一的に説明した。Franklin はまた、雷が電気現象であることを示す実験を行い、避雷針の発明につなげた。

電気現象の定量的な研究が本格的に始まるのは、C.A.de Coulomb (クーロン) の登場によってである。Coulomb は、1785 年に Coulomb の法則を発表し、電荷間の力がそれぞれの電荷の積に比例し、距離の 2 乗に反比例することを明らかにした。Coulomb はねじれ秤を用いた精密な実験を行い、電気力の正確な測定を可能にした。この研究により、電気現象の定量的な理解が大きく進展し、電磁気学の発展に寄与することとなったのである。

2.2 Coulomb の法則

Coulomb の発見は、すなわち電荷 q と Q をもつ 2 つの点電荷が距離 r 離れて存在するとき、それらの電荷間に働く力は、 $F_C \propto \frac{qQ}{r^2}$ ということである。このように、距離の 2 乗に反比例するいわゆる逆 2 乗則は重力とも共通するものであるが、これは後で明らかになるように 3 次元空間において等方的に放射される場合などに成り立つため、ある程度必然的なものともいえる。Coulomb の法則は、MKSA 有理単位系のもとで次のように表せる。

Coulomb の法則

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \quad (2.1)$$

この法則に基づいて議論を開始する。ただし、これは理論的に導出された式ではなく、あくまで実験結果から得られた式であることに注意してほしい。

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^{2+\delta}} \quad (2.2)$$

としたときに、現在の精度では $|\delta| < 2 \times 10^{-9}$ で得られている。

また、ここで ϵ_0 は真空の誘電率であり、その意味はだいぶ後に誘電体の話をするときによく理解できる。これは、

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi(2.998 \times 10^8)^2} = 8.854 \times 10^{-12} [\text{A}^2 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (2.3)$$

である*¹。あえて、こうして 4π を前面に出している理由は後々 Maxwell 方程式が得られたときにキャンセルされて美しくなるからである。また、Coulomb の法則は 2 点間の力の大

*¹ つまり、 $F_C = k \frac{qQ}{r^2}$ としたとき、比例定数 k は

$$\begin{aligned} k &= (2.998 \times 10^8)^2 \times 10^{-7} \\ &= 8.9876 \times 10^9 [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}] \end{aligned} \quad (2.4)$$

で与えられているということ。

きさで紹介したが、これをベクトルで表すこともできる。電荷 Q が位置 z_0 にあるとして、電荷 q が位置 \mathbf{x} で感じる力 \mathbf{F}_C は次のように書ける。

Coulomb の法則 (ベクトル形式)

$$\mathbf{F}_C = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_0|^3} \quad (2.5)$$

2.3 場の概念

ここでは、物理学においては非常に重要な考え方である場の概念を説明する。数式的な取り扱いほとんど変わらないが、物理的な考え方としては大きく異なる。まず、Coulomb の法則を次のように書き換える。

Coulomb の法則と電場

$$\mathbf{F}_C = q\mathbf{E}(\mathbf{x} = \mathbf{z}_0), \quad \mathbf{E}(\mathbf{x} = \mathbf{z}_0) := \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_0|^3} \quad (2.6)$$

ここで、新しく登場した \mathbf{E} は電場 (electric field) という。特に、時間変動しない場合には静電場という。数式的には q とそれ以外の部分に分離しただけで等価だが、物理的な意味は異なり電荷 q と Q が対等ではなくなった。式 (2.6) では、電荷 Q が作り出した電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x} = \mathbf{z}_0)$ が常に存在しており、そこにたまたま電荷 q を置いたことで電場から力を受けて Coulomb 力を感じるという解釈になる。

また、この背後には遠隔作用と近接作用の大きな考え方の転換がある。元々は古代から、当然ながら近接作用の立場、すなわち物体が直接接触することで力が伝達されるという考え方が常識であった。しかし、17世紀に Newton が発表したプリンキピアのインパクトは絶大だった。その後の力学の発展は目覚ましく、天体間に働く万有引力も次第に人々の常識となっていく。これは、物体の間に直接作用する遠隔作用の立場に基づいたものである*²。Coulomb の法則が発見された18世紀には、この遠隔作用の考え方が浸透しており、物体に直接力が働くと考えることには何の抵抗もなかった。ここに、鋭い洞察力を持って現れた研究者が M. Faraday (ファラデー) である。Faraday は、電荷 $q = 0$ のときにも、電荷 Q が存在するとその周りには電気力線というものが伸びており、それが歪んだ状態になると考えた。これは、近接作用の考え方である。実際に2つの電荷を置いて、それらの間に働く力だけを考えていては遠隔作用と近接作用の考え方はただの好みの問題ともいえる。しかし、電場の存在が非常に重要で本質的であることは後に明らかになる。同様に磁石の力についても、磁場というものを考えることができる。電場と磁場の実在を理解することは、電磁波の

*² 重力、万有引力が近接作用として理解されるようになるのは、一般相対性理論の登場以降である。

理解にとっても重要である。電磁波は、電場と磁場が相互に変化しながら空間を伝播する波動である。これにより、光や無線通信などの現象が説明される。電磁波の存在は、Maxwell方程式を通じて理論的に予測され、実験的にも確認された。これにより、電磁場が実在することが強く支持されたのである。

電場が存在するとしても、何もない空間が歪む状態を想像するのは当時の人々も苦勞したようである。そこで、仮想的に歪む物質としてエーテル (ether) というものが考えられた。しかし、後にこのような物質の存在が許されないという考察によって特殊相対性理論が発見されることになるのである。とはいえ、学習の段階では、このような物質をイメージして理解することも大事なことである。

2.4 重ね合わせの原理

さて、ここまでは2つの電荷に限った Coulomb の法則しか議論してこなかったが、複数の電荷がある点電荷系 Q_1, Q_2, \dots, Q_n の場合は一般に次のように表せる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i|^3} \quad (2.7)$$

すなわち、個々の電荷が作り出す電場の重ね合わせで全体の電場が表せる。これは決して自明なことではない。複数の電荷間で干渉を起こし、複雑な高次の寄与を生み出しても何ら不思議はない。しかし、電場においてはこの重ね合わせの原理が成立しているということを、実験結果が保証しているのである。

以上は、点電荷が複数ある場合の標識であるが、電荷が連続的に分布している場合には積分によって表せる。まず微小体積 $\Delta^3 \mathbf{x}_i := \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ の中の全電荷が Q_i であるとする。ここで、電荷密度を $\rho(\mathbf{x}_i)$ とすると、

$$Q_i = \rho(\mathbf{x}_i) \Delta^3 \mathbf{x}_i \quad (2.8)$$

と書ける。つまり、この段階で電場は次のように書ける。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1} \rho_i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \Delta^3 \mathbf{x}_i \quad (2.9)$$

更に、微小体積 $\Delta^3 \mathbf{x}_i \rightarrow 0$ の極限をとることで積分にできる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \rho(x', y', z') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \end{aligned} \quad (2.10)$$

以上が、電荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{x}')$ が与えられたときにその周りに作り出す電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ の表式である。

ちなみに、点電荷の場合には、デルタ関数 $\delta(x)^{*3}$ を用いて、

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n Q_i \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_i) \quad (2.13)$$

と書けるため、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \sum_{i=1}^n Q_i \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{z}_i) \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_i)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_i|^3} \end{aligned} \quad (2.14)$$

となり、式 (2.7) と一致する。

[例題] 一様な無限長一次元電荷のつくる電場

z 軸上にある細い針金に一様に帯電させ、単位長さあたりの電荷の線密度を λ とする。このとき、 z 軸から距離 R だけ離れた位置 P の電場を求める。

位置 $-z'$ の微小線長 dz' がもつ電荷は $\lambda dz'$ である。このとき、点 P につくる電場の大きさは、図 2.2 より、

$$|d\boldsymbol{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz'}{R^2 + z^2} \quad (2.15)$$

と表せる。

*3 デルタ関数 $\delta(x)$ とは、

$$\delta(x) := \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases} \quad (2.11)$$

かつ、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (2.12)$$

を満たすもののことであり、超関数の 1 つである。