

OkuNote

電磁気学

電磁気学再考 ～大学物理で学ぶ電磁気学の導入から～

okunote

2024年8月25日

このノートと連動してブログの運営も行っています(下記リンク)

<https://okunotes.com/concept-of-okunote/>

目次

第 1 章	導入	4
1.1	電磁気学の魅力	4
1.2	電磁気学の位置付け	6
1.3	MKSA 有理単位系	8
1.4	その他の記法	10
第 2 章	静電場	11
2.1	電気の研究	12
2.2	Coulomb の法則	13
2.3	場の概念	14
2.4	重ね合わせの原理	15
2.5	Gauss の法則	18
2.5.1	Gauss の法則の発見	18
2.5.2	Gauss の定理	30
2.5.3	Gauss の定理と Gauss の法則	32
2.5.4	電場の基本法則 1	32
2.6	静電ポテンシャル	33
2.6.1	静電ポテンシャルの導入	33
2.6.2	電場のなす仕事とポテンシャル	34
2.6.3	Stokes の定理	35
2.6.4	経路に依らない線積分	38
2.6.5	電場の基本法則 2	39
2.7	静電場解析	42
2.7.1	Poisson 方程式と Laplace 方程式	42
2.7.2	境界値問題と鏡像法	43
2.7.3	静電場の自己力	43
2.7.4	静電ポテンシャルの多重極展開	44

2.8	静電場のエネルギー	48
2.8.1	孤立導体の静電容量	49
2.8.2	導体球の静電エネルギー	49
2.8.3	静電場のエネルギー	50
2.8.4	一様帯電球の静電エネルギー	51
2.8.5	導体球と一様帯電球の静電エネルギーの違い	52
2.9	誘電体	53
2.9.1	誘電分極	53
2.9.2	分極ベクトルと電束密度	53
2.9.3	誘電体中の静電場の基本法則	55
2.9.4	異なる誘電体間の境界における接続条件	55
2.9.5	電場の屈折の法則	57
2.9.6	コンデンサの静電容量	57
2.9.7	コンデンサ (一様電場) が誘電体を引き込む力	59
2.10	静電場の基本法則	59
第 3 章	静磁場	61
3.1	磁石の研究	61
3.2	定常電流	62
3.2.1	定常電流の定義	62
3.2.2	定常電流の保存則	62
3.2.3	Ohm の法則	63
3.2.4	Ohm の法則の電子論的考察	65
3.2.5	Joule の法則	66
3.2.6	起電力がある場合の Ohm の法則	67
3.2.7	定常電流の基本法則	67
3.2.8	静電容量と電気抵抗の関係	68
3.3	定常電流がつくる磁場	68
3.3.1	静磁場の導入	69
3.3.2	Ampère の力	69
3.3.3	Lorentz の力	69
3.3.4	Biot-Savart の法則	70
3.3.4.1	直線電流がつくる磁場	71
3.3.4.2	円形電流がつくる磁場	72
3.3.4.3	ソレノイドがつくる磁場	73

3.4	ベクトルポテンシャル	73
3.5	静磁場の基本法則	74
3.5.1	静磁場の基本法則 1	75
3.5.2	静磁場の基本法則 2	75
3.5.3	静磁場の積分形の基本法則	77
3.6	磁性体	77
3.6.1	磁化	78
3.6.2	円形電流に一樣磁場が与えるトルク (常磁性体, 強磁性体の原理) .	78
3.6.3	電気双極子と磁気双極子	80
3.6.3.1	電気双極子がつくる電場	80
3.6.3.2	円形電流 (磁気双極子) がつくる磁場	82
3.6.4	磁化ベクトルと磁場の強さ	85
3.6.5	磁性体中の静磁場の基本法則	87
3.7	E - B 対応	88
第 4 章	時間変動する電磁場	90
4.1	変位電流	90
4.2	電磁誘導	90
第 5 章	Maxwell 方程式	91
	参考文献	92

第 1 章

導入

1.1 電磁気学の魅力

電磁気学は、応用範囲が非常に広く、奥が深い学問である。それだけに、物理学科に限らず、工学、情報科学、さらには化学などをはじめ、幅広い分野の学生や大人までもが勉強する学問である。電磁気学を面白いと思えるかどうかで、他の物理の分野に対する勉強意欲が大きく変わるといっても過言ではないだろう。電磁気学は、古典物理学 (力学, 電磁気学など) と現代物理学 (相対性理論, 量子力学, 場の量子論など) の橋渡しをする学問でもある。実際に筆者も、物理学科に所属していた頃に初めて電磁気学を学び、高校物理とは全く雰囲気の異なる理論展開に魅せられ、気が付けば物理学で博士号を取得するまでになっていた。

それはさておき、このノートでは、まず Maxwell 方程式の導出を目標に設定する。これは電磁気学の基本方程式をたった 4 つにまとめた非常に美しい方程式である。ここで、先にその方程式を提示しておく*1。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\epsilon_0}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x}, t). \quad (1.4)$$

これは、真空中の Maxwell 方程式である。この式の意味はこれから説明していくので、後でもう一度見直すとそれぞれの式の物理的な意味が理解できるはずである。これらの 4 つの式を用いると、多くの電磁気学的現象を説明することができる。直接的に Maxwell 方程式と結びつけるのにはまたテクニックが必要ではあるが、日常生活で見られる多くの現象 (例

*1 もちろん現時点で Maxwell 方程式の意味を理解する必要はないし、この章の内容もすべて理解する必要はない。明確な目標を持って学習するとモチベーションも保ちやすいという考えから、先にゴールを示しているだけである。

えば、静電気、磁気、光の反射・屈折）を科学的に説明することができるということである。物理学とは、実験を通して蓄積した経験から規則性を見出し、その背後にある本質を見抜くことで、実験結果をすべて説明できるような方程式を探し求める学問である。電磁気学の Maxwell 方程式や、力学の Newton 方程式はその例と言える。

Maxwell 方程式を出発点として諸々の現象を説明していくというスタイルによって、まさに電磁気学の面白さを体現する教科書 [1] も存在しており読む価値がある。しかし、やはり電磁気学を学ぼうとしている人にとっては、この強力な方程式をどのようにして導出するのかの方が専らの興味だと思うため、先述の通り、このノートでは Maxwell の方程式の導出をはじめに行う。

Maxwell 方程式が得られた後は、応用が非常に幅広い。例を挙げると、次のようなパターンの教科書がよく見られる。

- Maxwell 方程式を利用して改めて電磁気学的現象を見直す [1]
- 電気回路の理論に進む (アナログ回路, デジタル回路)
- 電場と磁場が作り出す電磁場の放射や電磁波について解説する [2] (加速器, 高エネルギー実験)
- 光学理論に進む (光の屈折, 反射, 偏光)
- 電子顕微鏡などに用いられる電子光学理論を解説する (SEM, TEM, STEM)
- 電磁気学から特殊相対性理論へのつながりを議論する (特殊相対性理論の発見)
- 電磁気学を拡張し, 特殊相対性理論と量子力学を組み合わせる量子電磁力学 (QED) へと進む
- and more...

これらの内容はいずれは解説したいと思っているが、現状では未定である。

この節の最後に述べておきたいのは、電磁気学の数学表現のことである。電磁気学は古典物理学と現代物理学の橋渡しであるため、物理学科の学生にとっては物理数学 (物理に用いる数学) の入門という位置付けにもなっている。多重積分, 広義積分, ベクトル解析や微分方程式などが初登場し, その後頻繁に現れる。これは, 先述の通り, 物理学が目的としているような実験結果をすべて説明するには, 数学を利用するのが最も相性が良かったためである。物理学にとってなぜ数学を必要とするのかは自明ではないが, 電磁気学を理解したと思える頃には数学の面白さにも気づき, これなしに電磁気学を語れないと感ずることだろう。一方で残念なことに, 数学の難しさのせいで電磁気学を諦めてしまう人も一定数いるようである。ここは純粋数学の議論をする場ではないのだから, 現実的にイメージできる物理現象と結びつけて, 時には自分で実験して確かめながら, 数学表現の意味を理解するのが良いだろう。このノートでもなるべく物理的意味を見失わないような解説を心がけるつもりである。物理と数学を同時に学んで一石二鳥だという気持ちで学んでほしい。

1.2 電磁気学の位置付け

まず、電磁気学とは、身近な例でいえば電気の力や磁石の力について、定量的に記述し、理解するための学問である。ここで、力というのは力学的な力のことであるため、想像するのはそれほど難しくないはずである。静電気によって髪の毛が逆立つのも、髪の毛に電気の力(クーロン力)が働くためであるし、電動モーターでは、電流が流れるコイルに対して磁石の力(ローレンツ力)が働くことによって回転運動が発生する。このような力、すなわち電磁相互作用の大きさをどのように表現できるのかを考えるのが電磁気学である。

ところで、現代の物理学では、4つの基本的な相互作用があると考えられている。つまり、すべての自然現象は4つの相互作用の組み合わせによって記述することができる。この4つの相互作用とは、

重力相互作用

重力は、質量を持つ物体同士が引き合う力である。日常生活では、物体が地面に引かれる現象として最も身近に感じることができる。重力相互作用は、物体の質量が大きくなるほど強くなる。

電磁相互作用

電磁気学の主要なテーマであり、電荷を持つ粒子間の相互作用である。クーロン力やローレンツ力などがこれに該当し、静電気現象や電磁波の伝播、化学結合など、多くの現象を説明する。

弱い相互作用

主に素粒子物理学の領域で現れる相互作用で、 β 崩壊などの放射性崩壊*2に関与する。弱い相互作用は、素粒子のフレーバー(種類)を変える唯一の相互作用である。

強い相互作用

原子核を構成する陽子や中性子を束縛する力である。強い相互作用は、非常に短距離でしか働かないものの、その強さは他の相互作用と比べて圧倒的である。

である。身近な例は重力相互作用と電磁相互作用であり、日常生活においては、弱い相互作用と強い相互作用を感じることはないだろう。

それぞれの相互作用の相対的な強さを単純に比べると、強い相互作用($\sim 10^{40}$) > 電磁相互作用($\sim 10^{38}$) \gg 弱い相互作用($\sim 10^{15}$) \gg 重力相互作用(1)の順となる。しかし、それぞれの相互作用が影響を与える有効な範囲が異なるため、考えているもののスケールによって相互作用の寄与が異なる。強い相互作用については、有効範囲が 10^{-15} mほどで、原子

*2 最近は崩壊ではなく、壊変というようになっている [3]

核のサイズ程度の影響力しかもたない。また弱い相互作用についても、 10^{-18} m 程度とさらに短い範囲にしか影響を及ぼさない。一方、電磁相互作用と重力相互作用については、理論的には距離の2乗に反比例した力が無限遠まで働く。そのため、人間のスケール (~ m) で見ると、電磁相互作用と重力相互作用が支配的に見えるのである。

このノートでは電磁気学、すなわち電磁相互作用の理解に向けて解説を進めていくわけだが、その後の物理学の学習の流れを簡単に説明しておく。まず、特殊相対性理論と量子力学を学び^{*3}、それらを合わせた新しい枠組みの場の量子論を学ぶ^{*4}。場の量子論の中で、電磁相互作用を扱う量子電磁力学 (QED) を学ぶことでようやく電磁相互作用を理解したと言えるだろう^{*5}。さらに、弱い相互作用と電磁相互作用を統一的に記述することができるのである。これは電弱統一理論という。ここで4つの基本相互作用の一部が統一した枠組みで記述できるようになるのだが、美しい理論体系であるために勉強してみると逆に難しく感じない不思議なところでもある。歴史を振り返ると、電磁気学も電気の力と磁気の力というのはかつては別々の力と考えられていた。しかし、これらは Maxwell 方程式によって、統一的に電磁気学の枠組みによって記述することができるようになったのである。物理学ではこのように本質を見出して、なるべく統一して究極の方程式で森羅万象を説明しようとするのである。とすると、残りの強い相互作用と重力相互作用も統一したくなる。電弱統一理論と強い相互作用を統一した理論を大統一理論といい、さらに重力相互作用まで統一したものを超大統一理論または万物の理論という。しかし、これらはまだ完成しておらず、現代物理学の大きなテーマとなっている。大統一理論については、実験的な研究によって検証が行われているものの肯定的な結果はなかなか得られていないのが現状である。一方、超大統一理論はさらに難しく検証もほぼできない状況であるが、超弦理論などがその理論の候補となっている。現在、筆者は電弱統一理論までしか勉強していないため、これ以上の解説はできないが、現代物理学の全体像と、その中における電磁気学の位置付けは理解してもらえただろうか。電磁気学で扱う電磁相互作用は、これらの中では最も扱いやすく、この他の相互作用を研究する上での指針を与えてくれる存在にもなる基本的な相互作用となる。まずは、電磁気学の理論体系を学び、どのように Maxwell 方程式によって、一見異なる電気と磁気の力を統一したのかを知ることができる。ここには現代物理学の研究へも通じるヒントが隠されているのかもしれない。

*3 この段階で物理学科だと学部3年頃だろう。

*4 この段階で修士1年。

*5 ここですでに授業で扱う範疇を逸脱しているため、自主的な学習または素粒子・原子核系の研究室での教育になる。

1.3 MKSA 有理単位系

ここでは、先にこのノートで用いる単位系について断っておく。初学者にとっていきなり単位系の話から始まって困ると思うが、電磁気学においては特に重要であり、単位系が異なると式の見え方が異なるため混乱する原因となるのである。実際に式 (1.1)–(1.4) の Maxwell 方程式や、高校物理でも扱う Coulomb (クーロン) の法則などをとって、他の教科書やサイトと比較すると若干見え方が異なる可能性がある*6。

このノートでは MKSA 有理単位系を採用するが、まずは MKSA 単位系から説明する。これは、電磁気学を論じる上で必要となる次の基本的な量の単位を定めている。

- 長さ [m] (メートル)
- 質量 [kg] (キログラム)
- 時間 [s] (秒, セカンド)
- アンペア [A] (アンペア)

それぞれの単位の頭文字をとって MKSA 単位系である。ここには、電荷の単位 [C] (クーロン) が含まれないが、上の単位を用いて $1 \text{ C} := 1 \text{ A} \cdot \text{s}$ によって与えられる。ちなみに、力学でよく用いる [N] (ニュートン) や [J] (ジュール) は、それぞれ $1 \text{ N} := 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ と $1 \text{ J} := 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ と表現できる。

物理の世界でも広く用いられる最も標準的な単位系として国際単位系 (SI) が定められている。SI では、一般に、物理量は次の 7 つの基本単位で構成される。

- 長さ [m] (メートル)
- 質量 [kg] (キログラム)
- 時間 [s] (秒, セカンド)
- アンペア [A] (アンペア)
- 熱力学温度 [K] (ケルビン)

*6 この単位系が異なるために混乱する問題は、物理学を学ぶ上で避けては通れない。実は、筆者がこのようにノートを自分で書くようになったきっかけがこれである。例えば、複数の教科書やサイトを見ながら勉強していると、ある教科書を見ながら計算を進めて、分からなくなって他の教科書を参照することがある。「ああ、この方程式をこうやって変形すると前の教科書の式になるのか」となって行ったり来たりしているうちに、この 2 つの教科書で「全く同じはずの式の符号が互いに異なっている！」とか「係数の 4π がいない！」となり得る。こうなってしまったときに、比較を始めた段階まで戻ればよいが、それでは数時間どころか数日単位でかかるような場合もあるわけである。このような現象の多くは、単位系や定義の仕方が異なることに起因する。この問題と縁を切るために、筆者は自分の notation (記法, 単位系, 定義) を決めておくことにした。すると、教科書やサイトを見るときに、自分の定義を絶対的な参照元として比較して適宜読み替えることができる。読者にとっては必ずしもこのノートの notation が親しみやすいわけではないと思うが、どの単位系を採用しているのかを先に把握しておくことは重要だということを認識しておいてほしい。

- 物質量 [mol] (モル)
- 光度 [cd] (カンデラ)

前半4つに着目すると、MKSA 単位系と共通していることが分かる。すなわち、MKSA 単位系は、SI のうち電磁気学に関係するものだけ抜粋したものだといえる。ここまでは受け入れやすいだろう。

次に、これを少し改良した MKSA 有理単位系について説明する。これは、Maxwell 方程式などの電磁気学に現れる基本的な方程式系を簡潔にする目的で導入される。具体的には 4π の係数をどこにおくかが問題となる。次章から具体的な説明に入るが、電荷 q と Q をもつ2つの点電荷が距離 r 離れて存在するとき、それらの電荷間にはたらく Coulomb 力は、MKSA 有理単位系では次のように表す。

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}. \quad (1.5)$$

ここで、 $1/(4\pi\epsilon_0)$ は定数であるから、重要なのは $F_C \propto \frac{qQ}{r^2}$ ということである*7。これは実験事実なので、単純に考えれば適当な係数 k を用いて、 $F_C = k \frac{qQ}{r^2}$ とすれば十分である。実際、高校物理ではこの形で教わるかもしれない。しかし、このまま議論を進めていくと、より本質的に電磁気学を表現できる Maxwell 方程式に辿り着いたときに空間が3次元であることを反映して 4π という因子があちこちに現れる。これが現れないようにしたのが MKSA 有理単位系である。ちなみに、有理というのは、無理数である π を消したからそのように名付けられている*8。MKSA 有理単位系の副作用として、最初に登場する最もシンプルな電磁気学法則である Coulomb の法則に 4π の因子が追加されてしまう。

ちなみに、他に CGS ガウス単位系、ローレンツヘヴィサイド単位系など様々な種類のものがある。これは単に基準の違いであって、何を基準にしても相対関係が変わらなければ物理現象を説明する上で矛盾は生じない。多様な単位系が乱立するのは、先述の通り、電磁気学の応用範囲が広いことにも一因があり、自分たちが最も利用する方程式を簡潔にするように、余計な係数を他に押し付けているのである。どの単位系を採用するのかは、それぞれの教科書の著者の裁量である。

まとめると、MKSA 有理単位系では、SI と共通する m, kg, s, A の4つを基本単位とし、さらに Maxwell 方程式に 4π の係数が現れないように「有理化」して改良した単位系である。なるべくシンプルな方程式から実験結果を説明できるのが物理学における理想という考えから、筆者は電磁気学の基本方程式である Maxwell 方程式が美しくなる MKSA 有理単位

*7 $A \propto B$ は、A は B に比例する、という意味。

*8 念のため、有理数と無理数について説明しておく。数は複素数 \mathbb{C} 、実数 \mathbb{R} 、有理数 \mathbb{Q} 、整数 \mathbb{Z} などの種類がある。そのうち有理数とは、整数の比で表すことができる数である。すなわち、 $p, q \in \mathbb{Z}$ を用いて p/q ($q \neq 0$) と表せるものである。このように表せないものは無理数という。無理数として有名なものが、 $\sqrt{2}$ や、ここで議論した円周率 π なのである。

系を採用している。

1.4 その他の記法

その他に、このノートで用いる記法についてここでまとめておく。

ベクトルは太字で表現する：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t). \quad (1.6)$$

ここで \mathbf{E} のベクトルは位置ベクトル \mathbf{x} と時刻 t に依存する量であることを明示的に表している。

多重積分については次のように表す。

$$\int \mathbf{E} d^3x := \int \int \int \mathbf{E} dx dy dz. \quad (1.7)$$

ただし「:=」は左辺を右辺によって定義するという意味である。ここで、積分範囲を明示的に記入していない場合は、考えている全領域にわたる積分を意味する。

また、やや発展的な話になるため必要なときに詳述するが、 $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ 対応を採用する。ちなみに、これと対をなすものは $\mathbf{E}-\mathbf{H}$ 対応と呼ばれるものである。 $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ 対応は、電場と磁場を記述する際に \mathbf{E} と \mathbf{B} を基本的な場とする立場であり、式 (1.1)–(1.4) の Maxwell 方程式を見れば明らかのように \mathbf{H} は登場しない。これは単純な話ではなく、電場と磁場の本質に迫る深い議論にも繋がるため、改めて後述する。そもそも、電場と磁場が何かということは次章から説明を始める。

この他に、このノートで用いる記法は随時ここに追記することとする。

第 2 章

静電場

本章からいよいよ Maxwell 方程式の導出に向けて、電磁気学の本格的な議論に入る。前半部分の全体的な流れは図 2.1 の通りである。

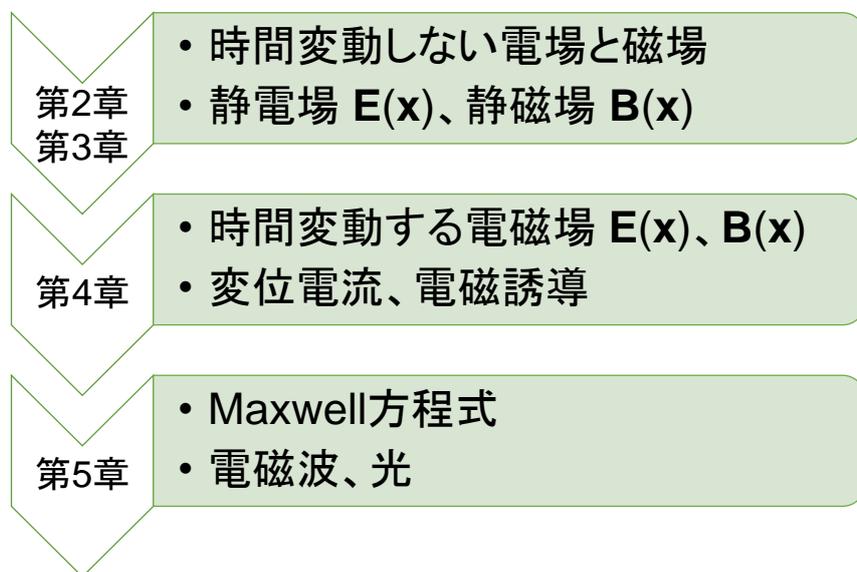


図 2.1 Maxwell 方程式導出までのフローチャート

まずは、時間変動しない静的な電場と磁場に限定して議論する。これはあとで見るように、時間変動する場合を考えると複雑になってしまうためである。はじめに第 2 章で静電場について扱い、第 3 章で静磁場について扱う。このときに、電気の力は電場によって、磁気の力は磁場によって、それぞれ記述できることを説明する。ここで物理学という学問全体でも非常に重要な考え方である「場の概念」についても説明する。ここまでで、完全ではないものの Maxwell 方程式に近いものが得られるが、この段階では電場と磁場がそれぞれ似ているが独立した方程式系となる。その後、第 4 章で時間変動する電場と磁場を考慮することで、変位電流と電磁誘導を学ぶ。これにより、電場と磁場が互いに影響を及ぼしあうこと

が理解でき、第5章で Maxwell 方程式が完成する。さらに Maxwell 方程式を整理すると、波動方程式が現れ、それは電磁波として伝播することが分かる。さらに、これこそが光であり、光速 c が理論的に与えられる。そこから、光速不変の原理に繋がり特殊相対性理論へ、ということになっていくのである。

また、この過程で物質中と真空中において、電場と磁場がどのように変わるかということについても適宜論じることになる。こちらは結果を見比べると一見簡単にも見えるが、非常に奥の深い話題であり、電磁気学の実用面においては特に重要な問題である。媒質が変わったときに、どのように場は変化するのだろうか、そしてそれはどのように記述するべきだろうか。媒質によって変わってしまうものが観測対象なので本質的だろうか (電場 E , 磁場 (または磁束密度) B)。それとも、媒質が変わっても背後で変わらない真の場が本質的だろうか (電束密度 D , 磁場の強さ H)。本ノートでは、先述の通り E - B 対応の立場をとっているのだが、なぜ媒質によらず一定な真の場ともいえる D , H を用いないのかは、納得するかは別にしてここで理解できるはずである。

2.1 電気の研究

電気の研究は古代から定性的なものではあったが続いており、有名な Coulomb の法則が登場する以前にも多くの発見があった。紀元前 600 年頃、ギリシャの哲学者 Thales (タレス) は琥珀をこすり合わせると軽い物体を引き寄せることを発見した。この現象は「琥珀効果」と呼ばれ、電気を意味する英語 “electricity” はギリシャ語で琥珀を意味する “ $\etaλεκτρον$ ” に由来する。その後、しばらく研究対象とはならなかったが、1600 年に W. Gilbert (ギルバート) が著書 “De Magnete (デ・マグネテ)” を発表し、磁気と静電気の違いを明確にした。Gilbert は琥珀以外にも、樹脂、硫黄、ガラス、水晶なども軽い物体を引き寄せる現象が見られることを発見した。更に Gilbert は、磁石が鉄を引き寄せるのとは異なり、琥珀が軽い物体を引き寄せる現象は電氣的なものであると説明した。

17 世紀に入ると、O. Guericke (ゲーリケ) が空気ポンプを発明し、真空中でも静電気の効果が発揮されることを示した。Guericke は硫黄球を使った摩擦起電機を開発し、電気を発生させる装置を初めて製作した。F. Hauksbee (ホークスビー) も摩擦起電機を改良し、電気の発生量を制御する方法を見つけた。この時期には、S. Gray (グレイ) が電気の伝導性に関する実験を行い、電気が物体を通じて伝わる性質を発見した。Gray は、導体と絶縁体の区別を初めて示し、導電性の概念を確立した。

18 世紀に入ると、C.F. de du Fay (デュフェイ) が電気を 2 種類の「電気流体」として捉え、ガラス摩擦による「ガラス電気」と樹脂摩擦による「樹脂電気」を提唱した。du Fay は、同種の電気は互いに反発し、異種の電気は引き合うという法則を発見した。この理論は後に B. Franklin (フランクリン) に影響を与え、Franklin は電気をプラスとマイナスの 2

つの電荷として統一的に説明した。Franklin はまた、雷が電気現象であることを示す実験を行い、避雷針の発明につなげた。

電気現象の定量的な研究が本格的に始まるのは、C.A.de Coulomb (クーロン) の登場以降である。Coulomb は、1785 年に Coulomb の法則を発表し、電荷間の力がそれぞれの電荷の積に比例し、距離の 2 乗に反比例することを明らかにした。Coulomb はねじり秤を用いた精密な実験を行い、電気力の正確な測定を可能にした。この研究により、電気現象の定量的な理解が大きく進展し、電磁気学の発展に寄与することとなったのである。

2.2 Coulomb の法則

Coulomb の発見は、すなわち電荷 q と Q をもつ 2 つの点電荷が距離 r 離れて存在するとき、それらの電荷間に働く力は、 $F_C \propto \frac{qQ}{r^2}$ ということである。このように、距離の 2 乗に反比例するいわゆる逆 2 乗則は重力とも共通するものであるが、これは後で明らかになるように 3 次元空間において等方的に放射される場合などに成り立つため、ある程度必然的なものともいえる。Coulomb の法則は、MKSA 有理単位系のもとで次のように表せる。

Coulomb の法則 (実験結果)

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}. \quad (2.1)$$

この法則に基づいて議論を開始する。ただし、これは理論的に導出された式ではなく、あくまで実験結果から得られた式であることに注意してほしい。

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^{2+\delta}} \quad (2.2)$$

としたときに、現在の精度では $|\delta| < 2 \times 10^{-9}$ で得られている。

また、ここで ϵ_0 は真空の誘電率であり、その意味はだいぶ後に誘電体の話をするときによく理解できる。これは、

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi(2.998 \times 10^8)^2} = 8.854 \times 10^{-12} [\text{A}^2 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (2.3)$$

である*1。あえて、こうして 4π を前面に出している理由は後々 Maxwell 方程式が得られたときにキャンセルされて美しくなるからである。また、Coulomb の法則は 2 点間の力の大

*1 つまり、 $F_C = k \frac{qQ}{r^2}$ としたとき、比例定数 k は

$$\begin{aligned} k &= (2.998 \times 10^8)^2 \times 10^{-7} \\ &= 8.9876 \times 10^9 [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}] \end{aligned} \quad (2.4)$$

で与えられているということ。

きさで紹介したが、これをベクトルで表すこともできる。電荷 Q が位置 z_0 にあるとして、電荷 q が位置 \boldsymbol{x} で感じる力 \boldsymbol{F}_C は次のように書ける。

Coulomb の法則 (ベクトル形式)

$$\boldsymbol{F}_C = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0|^3}. \quad (2.5)$$

2.3 場の概念

ここでは、物理学においては非常に重要な考え方である場の概念を説明する。数式的な取り扱いほとんど変わらないが、物理的な考え方としては大きく異なる。まず、Coulomb の法則を次のように書き換える。

Coulomb の法則と電場

$$\boldsymbol{F}_C = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}_0), \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}_0) := \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0|^3}. \quad (2.6)$$

ここで、新しく登場した \boldsymbol{E} は電場 (electric field) という。特に、時間変動しない場合には静電場という。数式的には q とそれ以外の部分に分離しただけで等価だが、物理的な意味は異なり電荷 q と Q が対等ではなくなった。式 (2.6) では、電荷 Q が作り出した電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}_0)$ が常に存在しており、そこにたまたま電荷 q を置いたことで電場から力を受けて Coulomb 力を感じるという解釈になる。

また、この背後には遠隔作用と近接作用の大きな考え方の転換がある。元々は古代から、当然ながら近接作用の立場、すなわち物体が直接接触することで力が伝達されるという考え方が常識であった。しかし、17世紀に Newton が発表したプリンキピアのインパクトは絶大だった。その後の力学の発展は目覚ましく、天体間に働く万有引力も次第に人々の常識となっていく。これは、物体の間に直接作用する遠隔作用の立場に基づいたものである*2。Coulomb の法則が発見された18世紀には、この遠隔作用の考え方が浸透しており、物体に直接力が働くと考えることには何の抵抗もなかった。ここに、鋭い洞察力を持って現れた研究者が M. Faraday (ファラデー) である。Faraday は、電荷 $q = 0$ のときにも、電荷 Q が存在するとその周りには電気力線というもの伸びており、それが歪んだ状態になると考えた。これは、近接作用の考え方である。実際に2つの電荷を置いて、それらの間に働く力だけを考えていては遠隔作用と近接作用の考え方はただの好みの問題ともいえる。しかし、電場の存在が非常に重要で本質的であることは後に明らかになる。同様に磁石の力についても、磁場というものを考えることができる。電場と磁場の実在を理解することは、電磁波の

*2 重力、万有引力が近接作用として理解されるようになるのは、一般相対性理論の登場以降である。

理解にとっても重要である。電磁波は、電場と磁場が相互に変化しながら空間を伝播する波動である。これにより、光や無線通信などの現象が説明される。電磁波の存在は、Maxwell方程式を通じて理論的に予測され、実験的にも確認された。これにより、電磁場が実在することが強く支持されたのである。

電場が存在するとしても、何もない空間が歪む状態を想像するのは当時の人々も苦労したようである。そこで、仮想的に歪む物質としてエーテル (ether) というものが考えられた。しかし、後にこのような物質の存在が許されないという考察によって特殊相対性理論が発見されることになるのである。とはいえ、学習の段階では、このような物質をイメージして理解することも大事なことである。

2.4 重ね合わせの原理

さて、ここまでは2つの電荷に限った Coulomb の法則しか議論してこなかったが、複数の電荷がある点電荷系 Q_1, Q_2, \dots, Q_n の場合は一般に次のように表せる。

重ね合わせの原理 (実験結果)

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i|^3}. \quad (2.7)$$

すなわち、個々の電荷が作り出す電場の重ね合わせで全体の電場が表せる。これは決して自明なことではない。複数の電荷間で干渉を起こし、複雑な高次の寄与を生み出しても何ら不思議はない。しかし、電場においてはこの重ね合わせの原理が成立しているということ、実験結果が保証しているのである。

以上は、点電荷が複数ある場合の表式であるが、電荷が連続的に分布している場合には積分によって表せる。まず微小体積 $\Delta^3 \mathbf{x}_i := \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ の中の全電荷が Q_i となるように空間を分割する。ここで、電荷密度を $\rho(\mathbf{x}_i)$ とすると、

$$Q_i = \rho(\mathbf{x}_i) \Delta^3 \mathbf{x}_i \quad (2.8)$$

と書ける。つまり、この段階で電場は次のように書ける。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \Delta^3 \mathbf{x}_i. \quad (2.9)$$

更に、微小体積 $\Delta^3 \mathbf{x}_i \rightarrow 0$ の極限をとることで積分にできる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \rho(x', y', z') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

以上が、電荷密度分布 $\rho(\mathbf{x})$ が与えられたときにその周りに作り出す電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ の表式である。

ちなみに、点電荷系の場合には、デルタ関数 $\delta(x)^{*3}$ を用いて、

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n Q_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i) \quad (2.13)$$

と書けるため、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \sum_{i=1}^n Q_i \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{z}_i) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i|^3} \end{aligned} \quad (2.14)$$

となり、式 (2.7) と一致する。

[例題] 一様な無限長一次元電荷のつくる電場

z 軸上にある細い針金に一様に帯電させ、単位長さあたりの電荷の線密度を λ とする。このとき、 z 軸から距離 R だけ離れた位置 P の電場を求める。

位置 $-z'$ の微小線長 dz' がもつ電荷は $\lambda dz'$ である。このとき、点 P につくる電場の大きさは、図 2.2 より、

$$|d\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz'}{R^2 + z'^2} \quad (2.15)$$

と表せる。

*3 デルタ関数 $\delta(x)$ とは、

$$\delta(x) := \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}, \quad (2.11)$$

かつ、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (2.12)$$

を満たすもののことであり、超関数の1つである。

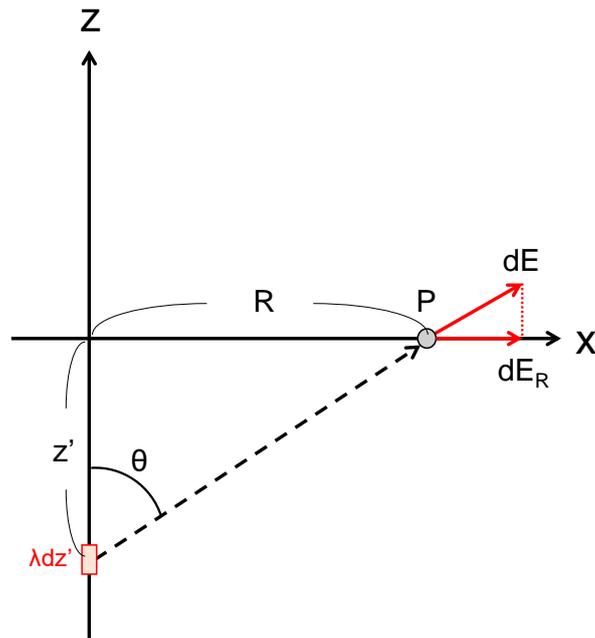


図 2.2 一様な無限長一次元電荷

これを z' について $-\infty$ から ∞ まで積分すればいいのだが、系の対称性から積分して得られる電場は円筒座標系 (R, ϕ, z) において、 R 方向の成分しか持たない。なぜなら、 ϕ 方向と z 方向に関しては問題設定上、特定の位置を特徴づけることができないため電場は ϕ 依存性および z 依存性は持てないからである。つまり $E(R) = \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} dE_R$ である。

ここで、図 2.2 で定義される角度 θ を用いると、

$$dE_R = |d\mathbf{E}| \sin \theta \quad (2.16)$$

であり、 $\tan \theta = R/z'$ より、 $z' = R/\tan \theta$ であるから、

$$dz' = -\frac{R}{\tan^2 \theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta \quad (2.17)$$

である。

よって、 z' の積分を θ の積分に置き換えることで計算が進み、

$$\begin{aligned} E(R) &= \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} dE_R \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{-\frac{R}{\sin^2 \theta} \sin \theta}{R^2 \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}\right)} d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \end{aligned} \quad (2.18)$$

を得る。

2.5 Gauss の法則

2.5.1 Gauss の法則の発見

ここまでは実験結果に基づいて得られた Coulomb の法則を利用していた。この法則があれば、電荷分布を与えられたときの電場や、それによって電荷に働く力を計算することができる。次は、そこから理論を少し飛躍させることで Gauss の法則を議論する。Coulomb の法則を紹介したときに、逆 2 乗則を考えれば距離の 2 乗に反比例することはある程度必然的だと述べた。それは、この話に繋がる。つまり、実験で得られた $F_C \propto \frac{qQ}{r^2}$ という性質を、たまたま距離の約 2 乗に反比例するのではなく、逆 2 乗則、すなわち厳密に距離の 2 乗に反比例すると考えるのである。ここは論理の飛躍があることだが、物理学においてこれが正しいことを実証するには、この仮説から導き出された結論が実験結果と矛盾しないことを示せばよい。現代の物理学においても、この点において矛盾が見られていないため、どうやら正しいようである。

逆 2 乗則とは、空間が 3 次元であることを反映している。3 次元空間のある点から等方的に放射されるエネルギーや力が距離 r に応じてどのように広がるかを考えてみよう。等方的であれば、すべて球状に広がるだろう。そして、この球の表面積は $4\pi r^2$ であり、距離 r の 2 乗に比例する。このとき、このエネルギーや力は広がる球の表面に均等に分布されるわけであるから、単位面積あたりの強度は $1/(4\pi r^2)$ であり、距離 r の 2 乗に反比例する。この性質が逆 2 乗則である。すなわち、3 次元空間上に等方的に放射されると考えるなら、強度は距離 r の 2 乗に反比例すると考えられる。

そこで、電場についても同様であると仮定してみる。いくつかのケースを想定する。

球の中心に電荷があるとき

図 2.3 のように電荷 Q をもつ点電荷を位置 z におき、そこを中心とした半径 $r := |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$ の球面 S を考える。

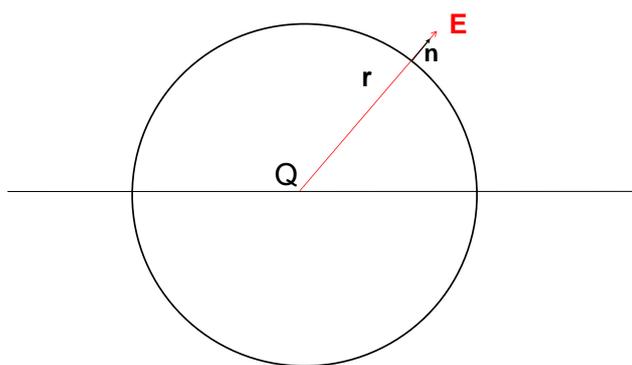


図 2.3 球の中心に電荷があるとき

このとき、球面 S における電場 \mathbf{E} と、球面 S に直交する外向きの法線ベクトル \mathbf{n} は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^3}, \quad \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|} \quad (2.19)$$

と書ける。この法線ベクトルがなぜ必要かという、これから球面 S 上で電場を面積分したいからである。面積分の厳密な定義は数学において行うこととして、次のように実行できる。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.20)$$

球の外側に電荷があるとき

それでは、球面 S を電荷の外にとったときはどうなるだろうか。いま、図 2.4 のように、点電荷 Q とは離れたところに中心をもち、かつその球内に電荷を含まない場合を考える。

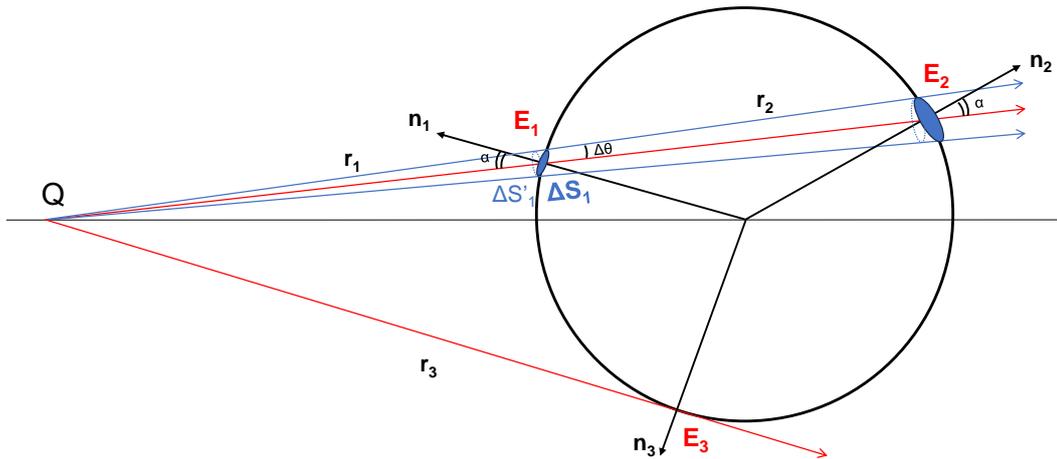


図 2.4 球の外側に電荷があるとき

このとき、球を貫く電場は r_3 のように接線となる場合を除き、球面を2度貫く。外側から内側へ貫く位置を r_1 、その後内側から外側へ貫く位置を r_2 とする。このときに貫く微小な球面 $\Delta S'_1$ 、 $\Delta S'_2$ はそれぞれ、 $r_{1,2}$ から $\Delta\theta$ の角度をもって 2π 回転して作られる球面とする。この球面の面積は、 $r_{1,2}$ を z 軸と見立てて球面座標系を用いれば求めることができる。

$$\Delta S'_1 = \int_{\theta=0}^{\Delta\theta} \int_{\phi=0}^{2\pi} r_1^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi r_1^2 (1 - \cos\Delta\theta), \quad (2.21)$$

$$\Delta S'_2 = \int_{\theta=0}^{\Delta\theta} \int_{\phi=0}^{2\pi} r_2^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi r_2^2 (1 - \cos\Delta\theta). \quad (2.22)$$

ただし、これは点電荷 Q の位置を中心とした球の表面積の一部であって、いま考えている球面 S の一部ではない。それぞれの球面が角度 α だけ傾いている、またはそれぞれの法線ベクトルのなす角が α であるともいえる。すなわち、

$$\Delta S_1 = \Delta S'_1 \cos\alpha = 2\pi r_1^2 (1 - \cos\Delta\theta) \cos\alpha, \quad (2.23)$$

$$\Delta S_2 = \Delta S'_2 \cos\alpha = 2\pi r_2^2 (1 - \cos\Delta\theta) \cos\alpha \quad (2.24)$$

である。

これらの面における電場の面積分を考えると、

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS &= |\mathbf{E}_1| |\mathbf{n}_1| \cos(\pi - \alpha) \Delta S_1 \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1^2} \cdot \cos \alpha \cdot 2\pi r_1^2 (1 - \cos \Delta\theta) \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS &= |\mathbf{E}_2| |\mathbf{n}_2| \cos \alpha \Delta S_2 \\ &= +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2^2} \cdot \cos \alpha \cdot 2\pi r_2^2 (1 - \cos \Delta\theta) \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.26)$$

と書ける。やや長い式ではあるが、これら2式の違いは符号だけである。 r_1 と r_2 については、クーロンの法則から生じる電場の $1/r^2$ と、球の表面積により生じる r^2 が互いに相殺される。したがって、

$$\int_{\Delta S_1 + \Delta S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Delta S_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{\Delta S_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS = 0 \quad (2.27)$$

を得る。同様に、角度 α が異なる球面を考えても球面 S の入口と出口で、電場の面積分の結果は相殺されることになる。また、ここまで図2.4の紙面上、すなわち2次元上で考えているように見えるが、点電荷 Q と球の中心を結ぶ軸に対して回転対称な系のため、任意の角度で紙面手前あるいは奥に傾いていたとしても図全体を回転させることで図2.4と全く同じようにとることができる。さらに、はじめに述べたように \mathbf{r}_3 のように1点しか接点をもたないものを考えると、これは球に正接しているため、 $\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{n}_3 = 0$ となるからこれもまた電場の面積分はゼロとなる。

したがって、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.28)$$

である。

ここまでの結果を合わせると、球面 S の場合、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & (S \text{ の中心に点電荷 } Q \text{ があるとき}) \\ 0 & (S \text{ の外部に点電荷 } Q \text{ があるとき}) \end{cases} \quad (2.29)$$

であることが分かった。

球ではない一般の閉曲面のとき

さらに、球面を一般の閉曲面に拡張してみる。こうなると簡単に表面積を表すことができなくなる。そこで、立体角というものをを用いて表す。これは2次元の場合の角度ラジアンが、

単位半径の円弧の長さで定義されるのを、3次元に拡張したものである。立体角の単位はステラジアンといい無次元量であり、単位球の表面積の大きさを定義する。角度は全周で 2π であるが、立体角は全球で 4π である。

図 2.5 のように、点電荷 Q を囲む閉曲面 S を考える。

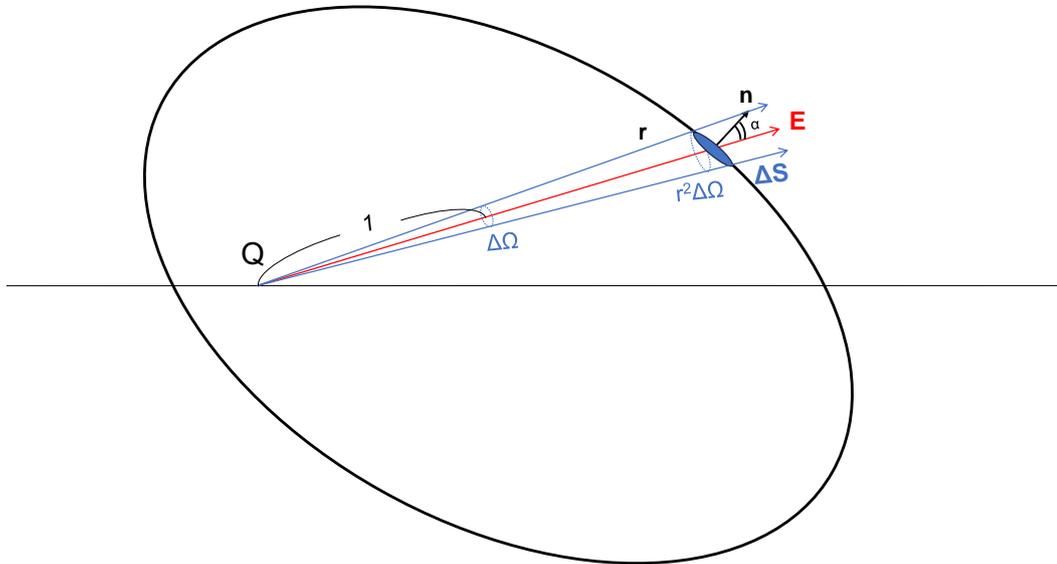


図 2.5 閉曲面の内側に電荷があるとき

議論の内容は、ほとんど上で行ったことと同じである。まずは、微小に区切られた面積 ΔS を求めたい。そのために、これを立体角 $\Delta\Omega$ と関係づける。面 ΔS を、 r ベクトルと直交するように角度 α だけ傾けて、さらに点電荷 Q から距離 1 のところまで縮小して移動させると $\Delta\Omega$ となる。距離 r だけ離れた位置では、距離と面積の関係から $r^2\Delta\Omega$ に拡大される。一方で、これは先ほど途中で角度 α だけ傾けたときの面積でもあったから、

$$r^2\Delta\Omega = \Delta S \cos \alpha \quad (2.30)$$

の関係がある。

それでは、この閉曲面 S における電場の面積分を計算しよう。上の関係はどの微小曲面 dS ($\Delta S \rightarrow 0$) でも成り立つから、

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (2.31)$$

である。よって、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.32)$$

となる。

つまり、閉曲面 S は球面でなくても、内部に点電荷 Q があるときの電場の面積分の結果は Q/ϵ_0 となることが分かった。これは同時に、点電荷が中心ではなく内部のどの位置に存在してもよいことを意味している。

それでは、外部に点電荷があるときはやはり電場の面積分の結果はゼロとなるだろうか。これはほぼ同じ議論になるため省略するが、やはりゼロになるのである。球面で考えていたときに、 ΔS_1 と ΔS_2 が出てきたが、実は

$$\Delta S_1 = r_1^2 \Delta\Omega, \quad (2.33)$$

$$\Delta S_2 = r_2^2 \Delta\Omega \quad (2.34)$$

という関係であり、球面の場合には $\Delta\Omega$ の具体的な表式が、

$$\Delta\Omega = 2\pi(1 - \cos \Delta\theta) \cos \alpha \quad (2.35)$$

と与えられていたのである。そのため、それ以降の議論は全く同様であり、

$$\int_{\Delta S_1 + \Delta S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Delta S_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{\Delta S_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS = 0 \quad (2.36)$$

となる。

任意の閉曲面を考えるため、閉曲面に入って出るだけとは限らない。閉曲面に対して、複数回出入りすることもあり得る。この場合も、入る回数と出る回数は同じため、それぞれで相殺されて最終的に電場の面積分はゼロとなるのである。また、閉曲面に対して正接する場合には、やはり電場ベクトルと法線ベクトルが直交するためゼロである。

以上の考察から、閉曲面 S は球面でなくても、外部に点電荷 Q があるときの電場の面積分の結果は 0 となることが分かった。

ここまでの結果を合わせると、任意の閉曲面 S に対して、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & (S \text{ の内部に点電荷 } Q \text{ があるとき}) \\ 0 & (S \text{ の外部に点電荷 } Q \text{ があるとき}) \end{cases} \quad (2.37)$$

であることが分かった。

ここで満足してはいけない。まだ拡張できるのである。点電荷の個数を増やし、さらに連続した電荷分布を考えてもよい。この場合の一般化は電場の重ね合わせの原理により

容易である。つまり、閉曲面 S に対して、その内部に点電荷が Q_1, Q_2, \dots, Q_n 、外部に Q_{n+1}, \dots, Q_m と用意したとき、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_{n+1} + \dots + \mathbf{E}_m \quad (2.38)$$

となるから、

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_S (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_{n+1} + \dots + \mathbf{E}_m) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

また、同様に連続な電荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ を考えた場合も、閉曲面 S の内部領域 V に含まれる総電荷 $\int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x$ だけが残る。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x. \quad (2.40)$$

以上の考察によって得られた結果が Gauss の法則である。

Gauss の法則

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\text{(閉曲面 } S \text{ 内部の総電荷)}}{\epsilon_0}. \quad (2.41)$$

Gauss の法則のポイントは、はじめに述べたように Coulomb の法則は逆 2 乗則に従うものだと論理を飛躍させたことである。導出の過程でも重要であったのは、Coulomb の法則により生じる $|\mathbf{E}| \propto 1/r^2$ と、微小曲面積 $dS = r^2 d\Omega$ が、面積分するとき相殺されて r に対する依存性が残らないことだった。ここが厳密に相殺されるのは Coulomb の法則において、 $|\mathbf{E}| \propto 1/r^{2+\delta}$ で $\delta = 0$ としているからである。実験結果では $|\delta| < 2 \times 10^{-9}$ でありすでに十分小さいが、Gauss の法則が発見された当時はまだ誤差も大きかったため、誤差を無視したのではなく δ が厳密にゼロであると仮定したことで得られた法則である。これが我々の現実世界において成立することは、このあと Gauss の法則に基づいて得られた結論が実験結果と何 1 つ矛盾しないことによって確かめられる。

Gauss の法則を用いることで、対称性の良い系であれば Coulomb の法則より比較的簡単に電場を計算することができる。Gauss の法則は非常に重要なため、慣れるために次にいくつか例題を見ていく。

[例題] (再掲) 一様な無限長一次元電荷のつくる電場

z 軸上にある細い針金に一様に帯電させ、単位長さあたりの電荷の線密度を λ とする。このとき、 z 軸から距離 R だけ離れた位置 P の電場を求めよ。

以前, Coulomb の法則を用いて求めた電場を, Gauss の法則を用いてもう一度求めてみよう. Gauss の法則では, 系の対称性を活かした球面 S をうまくとることが重要である. 今回は系の z 軸まわりの回転対称性を活かして, z 軸を中心とした長さ l , 半径 R の円筒表面を S とする (図 2.6).

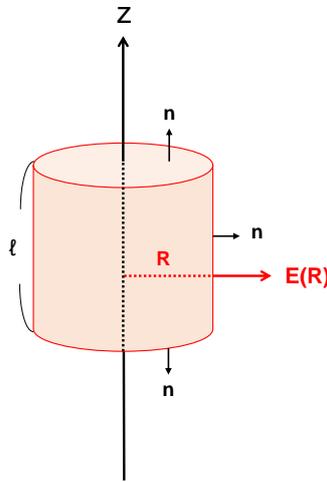


図 2.6 一様無限長電荷に対して Gauss の法則を利用するための面

このとき, 電場は系の対称性から円筒の側面に直交し, $\mathbf{E} = E(R)\mathbf{e}_R$ と書ける. よって,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E(R) \cdot 2\pi Rl \quad (2.42)$$

である. 円筒の上面と底面では電場と法線ベクトルが直交するため内積はゼロである. 一方で, この表面 S に囲まれる総電荷は, λl であるから, Gauss の法則より,

$$E(R) \cdot 2\pi Rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (2.43)$$

となり,

$$E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \quad (2.44)$$

となる. 当然ながら, Coulomb の法則で求めた式 (2.18) と同じ結果を与える.

[例題] 一様帯電球のつくる電場

半径 a の球に全電荷 Q を一様に帯電させたとき, 球の中心 O から r 離れた位置の電場を求め.

点 O を中心とする半径 r の球の表面を S として Gauss の法則を用いる (図 2.7).

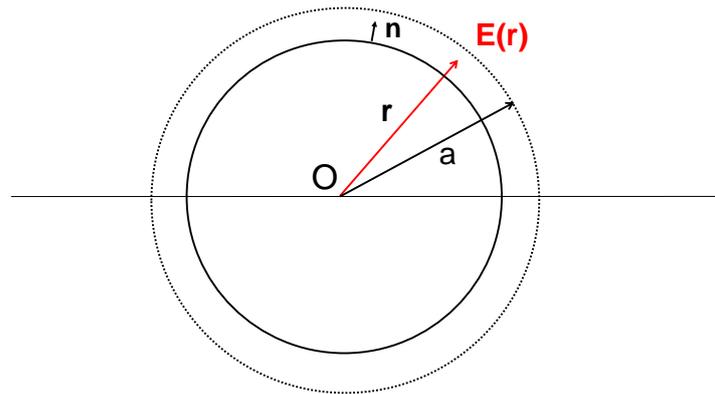


図 2.7 一様帯電球に対して Gauss の法則を利用するための面

系の対称性から電場は r のみに依存する．すなわち $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$ と書ける．このとき，

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 \quad (2.45)$$

である．一方で，この表面 S に囲まれる総電荷は，半径 r が帯電球の半径 a との大小関係により場合分けされることに注意すると，Gauss の法則より

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & (r > a) \\ \frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{Q \times 4\pi r^3 / 3}{4\pi a^3 / 3} & (r \leq a) \end{cases} \quad (2.46)$$

となるから，

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > a) \\ \frac{QR}{4\pi\epsilon_0 a^3} & (r \leq a) \end{cases} \quad (2.47)$$

である．

[例題] 導体球のつくる電場

半径 a の導体球に全電荷 Q を一様に帯電させたとき，球の中心 O から r 離れた位置の電場を求めよ．

この問題設定は一見，一様帯電球と同じように見える．ただし，今回は導体でできた球に電荷を与えたことに注意されたい．導体とは，内部の電荷が自由に移動できる物質のことであ

る。すなわち、もしも導体内部に電場があるとすれば電荷は自由に移動するため、これは時間に依存しない静電場の定義に反する。つまり、導体に関する静電場を考えるということは、それらの定義から導体内部に静電場が存在しないことになる。

この場合、帯電させた電荷は導体表面に集まる (図 2.8)。

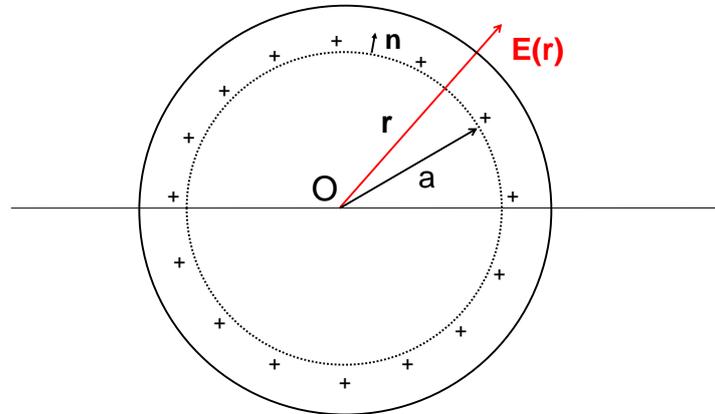


図 2.8 導体球に対して Gauss の法則を利用するための面

この点が一様帯電球と異なる問題設定であることに注意して、半径 r の球面 S を用いると、Gauss の法則より

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & (r > a) \\ 0 & (r \leq a) \end{cases} \quad (2.48)$$

となるから、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} & (r > a) \\ 0 & (r \leq a) \end{cases} \quad (2.49)$$

を得る。ここで、電荷の面密度 σ :

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (2.50)$$

を用いた。この電荷面密度 σ を用いた表現は、実は球以外でも同様に成り立つ。それを示すため、任意の形状をした導体について、その表面をまたぐような微小な円筒を考える (図 2.9)。

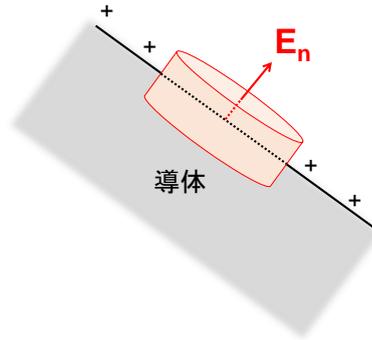


図 2.9 任意の形状の導体に対して Gauss の法則を利用するための面

このとき、導体表面と円筒の上面が平行になるくらいに微小な円筒をとると、側面では電場ベクトルと法線ベクトルが直交し、かつ上面ではそれらが平行になる。このとき、Gauss の法則から、上面の面積を ΔS として、その位置における電場の大きさを E_n とすると、

$$E_n \Delta S = \sigma \Delta S / \epsilon_0 \quad (2.51)$$

であり、

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.52)$$

を得る。また、同様に導体内部の電場は常にゼロである。

[例題] 一様帯電平行平板 (コンデンサ) のつくる電場

xy 平面上に、面密度 $+\sigma$ で一様に帯電させた無限に広く厚さの無視できる平板を置く。さらに、 $z = -d$ の面に、面密度 $-\sigma$ で同様に帯電させた平板を置く。これらのつくる電場を求める。ちなみに、これは距離 d だけ離れた無限の広さをもつコンデンサとみなせる。

xy 平面上をまたがる薄い円柱の表面を考えて Gauss の法則を適用する (図 2.10)。

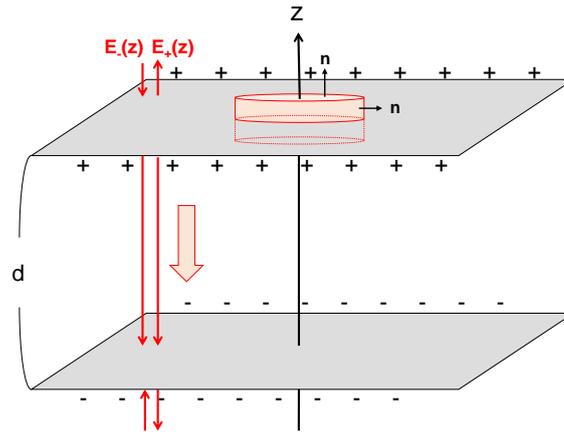


図 2.10 コンデンサに対して Gauss の法則を利用するための面

今回は xy 平面上の無限に広い板を考えているため電場は x, y に依らず, $\mathbf{E} = E(z)\mathbf{e}_z$ である. すなわち円柱側面では, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ である. 円柱の上面および底面の面積を ΔS として, まずは上側の板のみがつくる電場 $\mathbf{E}_+ = E_+(z)\mathbf{e}_z$ について,

$$2|E_+(z)|\Delta S = \sigma\Delta S/\varepsilon_0 \quad (2.53)$$

であり, $E_+(z)$ の符号に注意すると,

$$E_+(z) = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & (z \geq 0) \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & (z < 0) \end{cases} \quad (2.54)$$

となる. 同様に下側の板のみがつくる電場 $\mathbf{E}_- = E_-(z)\mathbf{e}_z$ について,

$$E_-(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & (z \geq -d) \\ +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & (z < -d) \end{cases} \quad (2.55)$$

となる.

以上の結果から, 2つの平行平板を合わせると,

$$\mathbf{E}_z = (E_+(z) + E_-(z))\mathbf{e}_z = \begin{cases} \mathbf{0} & (z < -d) \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{e}_z & (-d \leq z \leq 0) \\ \mathbf{0} & (z > 0) \end{cases} \quad (2.56)$$

となる. つまり, 平行平板に挟まれた $-d \leq z \leq 0$ の領域にのみ一様な電場がかかることが分かる. これは理想的なコンデンサであるが, 実際は有限の広さで有限の厚さをもつ.

2.5.2 Gauss の定理

次は、面積分を体積積分と関係づける Gauss の定理について紹介する．これを用いて、Gauss の法則の面積分を体積積分に変えることによって、(静)電場の基本法則の1つ目が得られる．ここで扱う Gauss の定理はやや数学のテクニックを要するため、詳細の説明や証明はベクトル解析のノートにて行う．電場ベクトルに限らず、任意のベクトル場 \mathbf{E} について以下の定理が成立する．

Gauss の定理

任意のベクトル場 \mathbf{E} に対して、 V は滑らかな境界 (表面) S をもつ有界領域とすると以下が成り立つ．

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, d^3x. \quad (2.57)$$

ただし、 div とは

$$\operatorname{div} \mathbf{E} := \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (2.58)$$

で定義される発散 (divergence) である．

証明. 厳密な定義に基づいた証明はベクトル解析で行うが、簡単な証明をここで行う．この証明法はベクトル解析にて行うものと基本的には同一である．図 2.11 のように、 z 座標が z である平面上の頂点 (x, y, z) , $(x + \Delta x, y, z)$, $(x, y + \Delta y, z)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$ から作られる長方形を z 方向に Δz だけ押し出してつくった微小な直方体を考える．この直方体の表面積を S 、それに囲まれる内部の領域を V とする．

直方体は6つの面があるが、 $x = x + \Delta x$ である面について考えると、

$$\int_{x+\Delta x} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = E_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z \quad (2.59)$$

と書ける．同様に、 $x = x$ の面については、

$$\int_x \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = -E_x(x, y, z) \Delta y \Delta z \quad (2.60)$$

と書ける．これらを合わせると、次のように表せる．

$$\int_{x \cup (x+\Delta x)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta^3 x. \quad (2.61)$$

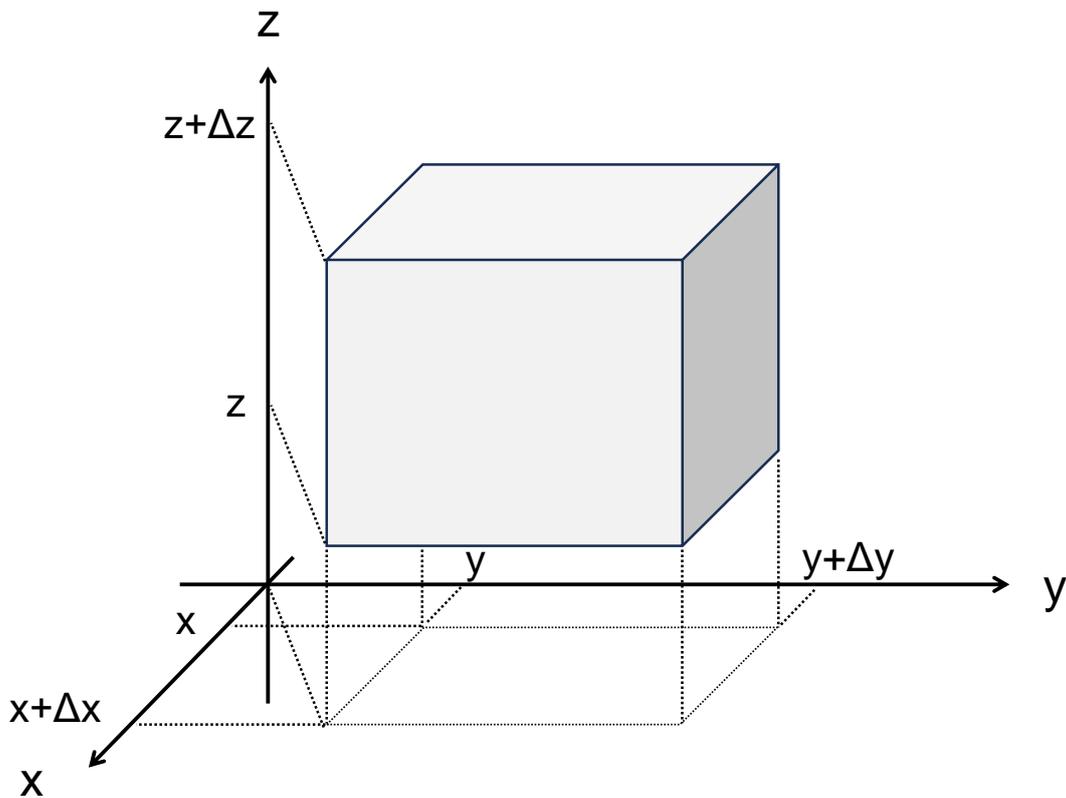


図 2.11 Gauss の定理を証明するための直方体

同様にして,

$$\int_{y \cup (y+\Delta y)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{E_y(x, y + \Delta, z) - E_x(x, y, z)}{\Delta y} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta^3 x, \quad (2.62)$$

$$\int_{z \cup (z+\Delta z)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{E_x(x, y, z + \Delta z) - E_x(x, y, z)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta^3 x \quad (2.63)$$

と書ける.

以上の結果を合わせると,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) d^3 x = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} d^3 x \quad (2.64)$$

となり, Gauss の定理が成り立つことが示せる. 一般の領域に対して, 非常に細かく直方体で空間を区切っていくと各直方体では同様に Gauss の定理が成り立つ. すると, 隣合う面どうしでは法線ベクトルが反平行になるため, 相殺され結果として領域の外側の表面の効果のみが残る. すなわち, 一般の領域に対して, 滑らかに接続された境界に囲まれる領域に対しては Gauss の定理が成り立つことが分かる. \square

また,

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta^3 x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta^3 x} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.65)$$

であり, 微小な箱 $\Delta^3 x \rightarrow 0$ の中から「湧き出る」ベクトル場 \mathbf{E} の量を表していると解釈できる. このことから, div は発散や湧き出しという.

2.5.3 Gauss の定理と Gauss の法則

Gauss の法則に対して, Gauss の定理を利用すると積分記号が外れ, 局所的な表現が得られる.

微分形の Gauss の法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}. \quad (2.66)$$

証明. Gauss の法則より, 任意の閉曲面 S に囲まれる領域 V に対して,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\int_V \rho(\mathbf{x}) d^3 x}{\epsilon_0} \quad (2.67)$$

が成立する. 一方で, Gauss の定理を左辺に利用することで,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3 x = \frac{\int_V \rho(\mathbf{x}) d^3 x}{\epsilon_0} \quad (2.68)$$

となる. ここで, 領域 V は任意にとれるため各点 \mathbf{x} において,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (2.69)$$

が成立し, 表式を得る. □

2.5.4 電場の基本法則 1

Gauss の法則に対して, Gauss の定理を適用して得られた微分形の Gauss の法則:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (2.70)$$

は, 静電場を決定する基本法則といえる. これは, これまでの Coulomb の法則や Gauss の法則のような遠隔作用による表現ではなく, 近接作用の表現になっている. すなわち, 位置 x 方向にだけ電場が変化する場合,

$$E_x(x + \Delta x) = E_x(x) + \frac{\rho(x)\Delta x}{\epsilon_0} \quad (2.71)$$

のように $x + \Delta x$ と x の電場が関係づけられている。そして、その電場を変える要因となるのが電荷の存在であり、位置 x の電荷密度 $\rho(x)$ の分だけ変位するようになっている。

この章では静電場のみを扱うため、時間変動については考えていない。ただし、電荷密度が $\rho(\mathbf{x}, t)$ と表せる場合、それに従って電場も $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ と変化するとして、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\epsilon_0} \quad (2.72)$$

のようにそのまま拡張できる。これは、電場を決定する基本法則であり、Maxwell 方程式の1つ目、式 (1.1) がここで得られた。

2.6 静電ポテンシャル

2.6.1 静電ポテンシャルの導入

前節では Maxwell 方程式の1つが得られたが、電場を決定する基本法則は1つだけではない。もう1つもセットで電場を決定できる。まずは、そのための準備として静電場におけるポテンシャルを導入する。ポテンシャルという考え方は物理学においては常套手段としてどの分野にも現れるものである。電場はベクトル量であるから扱いが面倒な場合がある。そのときに、次の関係を満たすスカラー量であるポテンシャル ϕ が存在するとする。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) =: -\text{grad}\phi(\mathbf{x}). \quad (2.73)$$

また、このようにスカラー量に対して ∇ を作用させる操作を勾配 (gradient) という。このようなポテンシャルが存在すれば、位置 \mathbf{x} に対して、ただ1つの値をもつスカラー量で表現される。そして、電場を求めたい場合は、勾配をとることで上式から得られる。

電場ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (2.74)$$

のように表せるが、これに対応するポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ はどう表せるだろうか。

ここで、準備として次の量を計算してみる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{x - x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (2.75)$$

したがって、 y, z についても同様であるから、

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (2.76)$$

である。この右辺は電場ベクトルの式の中にあるからそのまま利用できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

ただし、電場ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ は連続であることから、微分操作 ∇ と、積分の順序交換を行った。したがって、静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ の具体形は、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.78)$$

と書ける。

2.6.2 電場のなす仕事とポテンシャル

点電荷 $q (> 0)$ を点 P (位置 z_P) から点 Q (位置 z_Q) まで運ぶために外部からなす仕事 W を求めてみる。

$$\begin{aligned} W &:= - \int_{z_P}^{z_Q} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{z} = - \int_{z_P}^{z_Q} q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} \\ &= +q \int_{z_P}^{z_Q} \nabla\phi \cdot d\mathbf{z} \\ &= +q \int_{z_P}^{z_Q} d\phi = q(\phi(z_Q) - \phi(z_P)). \end{aligned} \quad (2.79)$$

ただし、 $z = (x, y, z)$ としたときに、

$$\nabla\phi \cdot d\mathbf{z} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz \right) = d\phi \quad (2.80)$$

と書けることを利用した。また、仕事 W の定義に使用した $\int_{z_P}^{z_Q} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{z}$ は線積分というものである。これは直線に限らず、任意の曲線に対してその向きを保つ表示を z であるとしたときに、その曲線に沿った積分である。この曲線は、あるパラメータ s を用いて、

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \quad (2.81)$$

と表される。この表示を用いて線積分をあらわに書くと、

$$\begin{aligned} \int_{z_P}^{z_Q} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{z} &= \int_{z_P}^{z_Q} \left(F_x(x(s), y(s), z(s)) \frac{dx(s)}{ds} ds \right. \\ &\quad \left. + F_y(x(s), y(s), z(s)) \frac{dy(s)}{ds} ds + F_z(x(s), y(s), z(s)) \frac{dz(s)}{ds} ds \right) \end{aligned} \quad (2.82)$$

ということである。

それでは、式 (2.79) の結果を考えてみる。点 P から点 Q まで電荷を移動させるための仕事は、「経路に依らず」始点と終点の位置における静電ポテンシャル ϕ の差で一意に決まる。ただし、この結論はすべての線積分で成り立つわけではない。導出の過程を見れば分かるように、被積分関数が勾配 (grad) を用いて表せたことによって最終的に線積分の始点 (z_P) と終点 (z_Q) のみで決まるようになったのである。

そこで、次節では、線積分においてどのような場合に経路に依らない結果になるかをもっと一般的に調べる。そのため、ここからは少し物理から離れて数学 (ベクトル解析) の議論になる。線積分の経路問題を考えるために重要な指針を与えてくれるのが Stokes の定理である。Stokes の定理を理解すると、なぜ勾配 (grad) を用いて表せるものの場合に線積分が経路に依らないかが、第 2.6.5 節で理解できる。

2.6.3 Stokes の定理

Gauss の定理は面積分を体積積分と関係づける定理であった。Stokes の定理は、線積分を面積分と関係づける定理である。線積分や Stokes の定理の詳細な定義づけや証明はベクトル解析のノートにて行う。

電場ベクトルに限らず、任意のベクトル場 \mathbf{E} について以下の定理が成立する。

Stokes の定理

任意のベクトル場 \mathbf{E} に対して、 S は滑らかな境界 C をもつ有界領域とし、 z を向きを保つ C の表示であるとして、以下が成り立つ。

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.83)$$

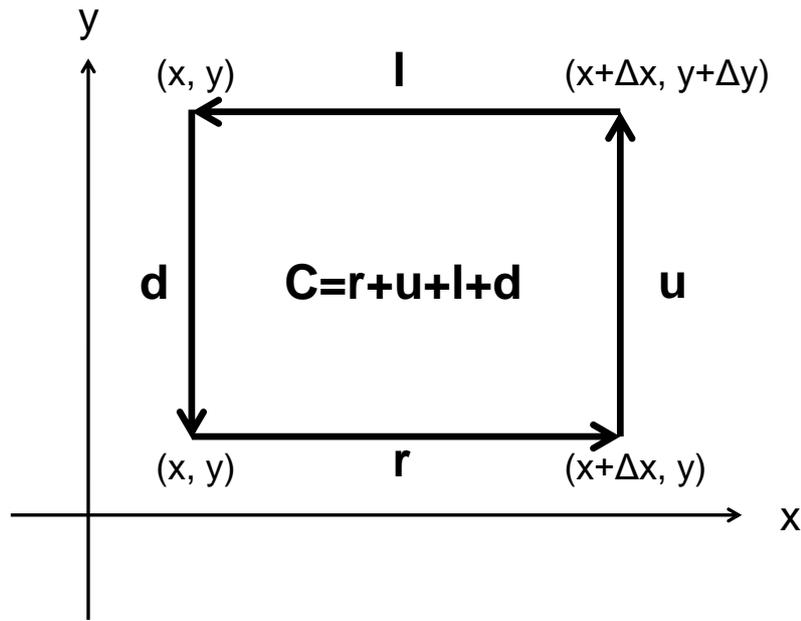
ただし、rot とは

$$\text{rot } \mathbf{E} := \nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (2.84)$$

で定義される回転 (rotation) である。また、閉路の線積分である場合、明示的に \oint を使うことがある。ここで、回転を外積を用いて定義したが、ベクトル場の外積は次のような演算である。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} := (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x). \quad (2.85)$$

証明. Gauss の定理と同様に、厳密な定義に基づいた証明はベクトル解析で行うが、簡単な証明を行う。 xy 平面上の頂点 $(x, y, 0), (x + \Delta x, y, 0), (x + \Delta x, y + \Delta y, 0), (x, y + \Delta y, 0)$ から作られる長方形を考え、この座標の順番で結んだ経路を C とし、それに囲まれる平面を S とする。経路 C に沿ってベクトル \mathbf{E} を線積分する。このとき、図 2.12 のように 4 つ

図 2.12 Stokes の定理の証明に用いる経路 $C = r + u + l + d$

の直線経路 r (right), u (up), l (left), d (down) に分割する.

区間 r では, \mathbf{E} の x 成分が $E_x(x, y, 0) \rightarrow E_x(x + \Delta x, y, 0)$ と変化するため,

$$(\text{区間 } r \text{ における } \mathbf{E} \text{ の } x \text{ 成分}) = E_x(x, y, 0) + (\Delta x \text{ の } 1 \text{ 次以上の項}) \quad (2.86)$$

と書けるので,

$$\int_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = E_x(x, y, 0)\Delta x + (\Delta x \text{ の } 2 \text{ 次以上の項}) \quad (2.87)$$

となる. 同様に, 区間 u では, \mathbf{E} の y 成分が $E_y(x + \Delta x, y, 0) \rightarrow E_y(x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$ と変化するため,

$$(\text{区間 } u \text{ における } \mathbf{E} \text{ の } y \text{ 成分}) = E_y(x + \Delta x, y, 0) + (\Delta y \text{ の } 1 \text{ 次以上の項}) \quad (2.88)$$

と書けるので,

$$\int_u \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = E_y(x + \Delta x, y, 0)\Delta y + (\Delta y \text{ の } 2 \text{ 次以上の項}) \quad (2.89)$$

となる. また区間 l では, \mathbf{E} の x 成分が $E_x(x + \Delta x, y + \Delta y, 0) \rightarrow E_x(x, y + \Delta y, 0)$ と変化するため,

$$(\text{区間 } l \text{ における } \mathbf{E} \text{ の } x \text{ 成分}) = E_x(x, y + \Delta y, 0) + (\Delta y \text{ の } 1 \text{ 次以上の項}) \quad (2.90)$$

と書けるので,

$$\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = E_x(x, y + \Delta y, 0)\Delta x + (\Delta x \text{ の 2 次以上の項}) \quad (2.91)$$

となる. 最後に区間 d では, \mathbf{E} の y 成分が $E_y(x, y + \Delta y, 0) \rightarrow E_y(x, y, 0)$ と変化するため,

$$(\text{区間 } d \text{ における } \mathbf{E} \text{ の } y \text{ 成分}) = E_y(x, y, 0) + (\Delta y \text{ の 1 次以上の項}) \quad (2.92)$$

と書けるので,

$$\int_d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = E_y(x, y, 0)\Delta y + (\Delta y \text{ の 2 次以上の項}) \quad (2.93)$$

となる.

よって, 閉路 $C = r + u + l + d$ における線積分は, 微小量 $\Delta x, \Delta y$ の 2 次以上を無視すると,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E}(x, y, 0) \cdot d\mathbf{z} &= E_x(x, y, 0)\Delta x + E_y(x + \Delta x, y, 0)\Delta y \\ &\quad + E_x(x, y + \Delta y, 0)(-\Delta x) + E_y(x, y, 0)(-\Delta y) \\ &= \frac{E_y(x + \Delta x, y, 0) - E_y(x, y, 0)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \\ &\quad - \frac{E_x(x, y + \Delta y, 0) - E_x(x, y, 0)}{\Delta y} \Delta x \Delta y \\ &= \left(\frac{\partial E_y(x, y, 0)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y, 0)}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \\ &= (\text{rot } \mathbf{E}(x, y, 0))_z \Delta x \Delta y = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.94)$$

と書ける. ただし, \mathbf{S} の向きは境界線 C の右ねじの方向にとる.

また,

$$(\text{rot } \mathbf{E}(x, y, 0))_z = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint_C \mathbf{E}(x, y, 0) \cdot d\mathbf{z} \quad (2.95)$$

であり, ある z における平面 $\Delta x \Delta y \rightarrow 0$ の境界線を 1 周回転するベクトル場 \mathbf{E} の量が $\text{rot } \mathbf{E}$ の z 成分を表しているとして解釈できる. このことから, rot は回転という.

以上の議論は, $z = 0$ に固定したものであったが, 任意にとった平面でも全く同様である. 以上の証明は微小な長方形に限った Stokes の定理であった. 一般の閉曲線に対しても, 非常に細かく長方形で閉曲線内の平面を区切っていくと各長方形では同様に Stokes の定理が成り立つ. すると, 隣合う境界では接線ベクトルが反平行になるため, 相殺され結果として閉曲線上の効果のみが残る. すなわち, 一般の閉曲線に対しても, Stokes の定理が成り立つことが分かる.

よって,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.96)$$

となり, 表式を得る. □

2.6.4 経路に依らない線積分

それでは改めて, 点 P (位置 z_P) から点 Q (位置 z_Q) までの線積分の中で, 経路に依存しないときはどのような場合であろうか. これは言い換えると, 点 P と点 Q を通る任意の閉曲線 C の線積分の結果がゼロであることになる. なぜなら, 図 2.13 のようにこの閉曲線を $P \rightarrow Q$ の C_1 と $Q \rightarrow P$ の C_2 に分割したときに,

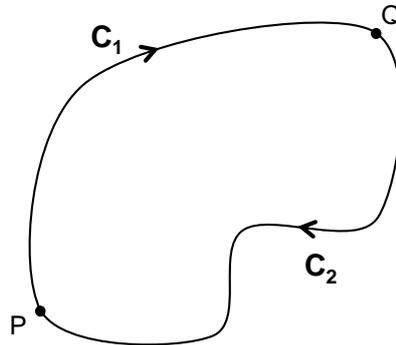


図 2.13 点 P と点 Q を通る閉曲線 C の分割: $C = C_1 + C_2$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} + \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = 0 \quad (2.97)$$

となり,

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} \quad (2.98)$$

が成立するからである. また逆に, 線積分が経路に依らず始点の z_P と終点の z_Q にのみ依存する場合は, この閉曲線 C を任意にとれるため同じ議論から C の一周積分はゼロとなる.

さらに, Stokes の定理を利用すると,

$$0 = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.99)$$

である. ここで, 閉曲線 C は任意にとれるため, 各点 z において $\nabla \times \mathbf{E}(z) = \mathbf{0}$ となる. よって, 線積分が経路に依らないための必要十分条件は,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.100)$$

である。

2.6.5 電場の基本法則 2

ここで、話を電磁気学に戻して、再び電場ベクトル \mathbf{E} について考える。前節では、あるベクトル場の回転 (rot) がゼロであれば、その線積分は経路に依らないことが分かった。電場ベクトル \mathbf{E} の回転を調べてみる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \nabla \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (2.101)$$

x 成分だけ計算してみると、

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \left((z - z') \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} - (y - y') \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) \\ &= -\frac{3}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \left((z - z') \frac{y - y'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5} - (y - y') \frac{z - z'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.102)$$

であり、 y, z 成分も同様のため、たしかに静電場の電場ベクトル \mathbf{E} は、 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ であることが分かる。そのため、Stokes の定理により、 $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z}$ の値が経路に依らずに始点の \mathbf{z}_P と終点の \mathbf{z}_Q のみで決まっていたのである。

ここで、更にもう一步踏み込んでみよう。静電場の場合は、静電ポテンシャル ϕ を用いて次のように書けた。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) \quad (2.103)$$

ここでベクトル解析の恒等式により、実はいたるところ連続な任意のスカラー量 ϕ に対して、

$$\nabla \times \nabla\phi = 0 \quad (2.104)$$

が成立する。これは、

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla\phi)_x &= \frac{\partial}{\partial y} (\nabla\phi)_z - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla\phi)_y \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.105)$$

などから容易に確かめられる。ただし、 y と z の偏微分を入れ替えるため、 ϕ は連続である必要がある。

最後に、これまで得られた情報を整理する。静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ の場合は、 $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ を満たしていた。そのため、ベクトル恒等式 $\nabla \times \nabla\phi = 0$ から、 $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})$ という関係をもつ静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ の存在が保証される。さらに、Stokes の定理を用いることで、

任意の閉曲線 C に沿う線積分は $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = 0$ となる。そのため、2点間における静電場の線積分は、経路に依らず始点と終点のみで一意に決まる。

以上より、静電ポテンシャルの存在を保証する次の式：

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.106)$$

を2つ目の静電場の基本法則とする。ただし、こちらは残念ながら時間変動したときには成立せず、磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ を用いて、

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2.107)$$

のように修正されることを後で見る。すなわち静電ポテンシャルは時間変動する場においては存在しない。時間変動する場合には、その代わりに導入することになるが、それはこの章では扱わない。

[例題] (再掲) 一様な無限長一次元電荷のつくる電場

z 軸上にある細い針金に一様に帯電させ、単位長さあたりの電荷の線密度を λ とする。このとき、 z 軸から距離 R だけ離れた位置 P の電場と静電ポテンシャルを求めよ。

以前、Gauss の法則を利用して電場は式 (2.44) で次のように書けることを見た。

$$\mathbf{E}(R) = E(R)\mathbf{e}_R = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\mathbf{e}_R. \quad (2.108)$$

一方で、これは静電ポテンシャル $\phi(R)$ を用いて、

$$E(R) = -\frac{\partial \phi(R)}{\partial R} \quad (2.109)$$

と書ける。よって、

$$\phi(R) = -\int E(R) dR = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R + C \quad (2.110)$$

である。ただし、 C は積分定数である。つまり、積分定数の分だけ静電ポテンシャルは不定性がある。静電ポテンシャルの絶対値に意味はなく、周囲との相対的な大小関係によって勾配をつくり、それが電場となる。今回は、無限遠 ($R \rightarrow \infty$) において

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \phi(R) = \infty \quad (2.111)$$

となるため、無限遠点を基準にとることができない。そこで、 $\phi(R=1)=0$ のように基準をとることに決めれば、 $C=0$ となり、

$$\phi(R) = - \int E(R) dR = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R \quad (2.112)$$

とすることができる。この基準の決め方は、考えやすいように自由にとることができるが、無限遠点を基準にとれるのであればそれを採用することが多い。

[例題] (再掲) 一様帯電球のつくる電場

半径 a の球に全電荷 Q を一様に帯電させたとき、球の中心 O から r 離れた位置の電場と静電ポテンシャルを求める。

このときは、式 (2.47) より、 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ としたとき、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > a) \\ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} & (r \leq a) \end{cases} \quad (2.113)$$

と書けることはすでに求めた。これの静電ポテンシャル $\phi(r)$ は、 $r > a$ のとき、

$$\phi(r) = - \int E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_1 \quad (2.114)$$

今回は無限遠で静電ポテンシャルがゼロとなるように基準を決めると、 $C_1 = 0$ となる。

次に、 $r \leq a$ のときは、

$$\phi(r) - \phi(a) = - \int_a^r E(r) dr = - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^3} (r^2 - a^2) \quad (2.115)$$

より、

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^3} (a^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \\ &= \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{r^2}{a^2} \right) \end{aligned} \quad (2.116)$$

と書ける。

よって、以上の結果をまとめると、電荷密度 $\rho = \frac{Q}{4\pi a^3/3}$ を用いて、

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} & (r > a) \\ \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{r^2}{a^2} \right) & (r \leq a) \end{cases} \quad (2.117)$$

を得る. $r = a$ では $\phi(a) = \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0}$ となり, $\phi(r)$ は連続であることが分かる. これは, 今回 $r \leq a$ の静電ポテンシャルを導出する際にしっかりと積分範囲に注意して定積分を行ったためである. もしも静電ポテンシャルが不連続であれば, その点で微分ができず静電場の存在と矛盾する.

今回の場合も定積分ではなく不定積分を行って, 後から積分定数を決めることもできる. その際は, すでに静電ポテンシャルの基準を無限遠点で決めているため, それに合わせて $r = a$ で連続となるように積分定数を決めるべきである.

2.7 静電場解析

すでに静電場の基本法則は, 式 (2.70) と式 (2.106) で得られたように,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}, \quad (2.118)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.119)$$

である. Maxwell 方程式までの道のりとしては, 次に次章で静磁場の基本法則を見て, さらに時間変動する場合の電磁場を考える. しかし, 本章ではもう少し静電場について考えて理解を深めることにする.

2.7.1 Poisson 方程式と Laplace 方程式

静電ポテンシャルは, $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})$ であったから, 両辺に ∇ を作用させることによって,

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}) \quad (2.120)$$

を得る. これを, Poisson(ポアソン) 方程式という. ここで,

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.121)$$

と定義される微分演算子はラプラシアン (Laplacian) である.

特に, $\rho(\mathbf{x}) = 0$ の場合は,

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.122)$$

となるが, これを Laplace(ラプラス) 方程式という.

これらは, 静電場の基本法則を静電ポテンシャルの微分方程式の形に書き直しただけに過ぎない. そのため, 何か新しい結果が得られたわけではないが, 電場を求める際にはこの微分方程式を解いて微分してもよい.

2.7.2 境界値問題と鏡像法

Poisson 方程式と Laplace 方程式は、それ以前に扱ってきた方程式系と全く同じというわけではない。これまでは、電荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ が与えられたときに、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ や静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ を求めるというタイプの問題を扱ってきた。しかし、逆に電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ や静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ が与えられたときに電荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ を求めるというタイプの問題は取り扱いが難しかった。この種の問題を境界値問題という。この問題設定の例として、導体を扱うときに表面の電位のみ与えられてその表面に分布する電荷面密度を求める場合などがある。この場合は、電荷分布が未知であるから、それを用いる Gauss の法則などは適用することができない。そのため、導体表面で同電位であるという条件から、Laplace 方程式を解くことになる。しかし、この種の微分方程式を解く問題は往々にして複雑であり、厳密に解ける場合は対称性の良い場合に限られる。

鏡像法とは、与えられた境界条件を満たすように仮想的に電荷を配置 (仮想電荷) して解く手法である。例えば、 $(x, 0, 0)$ に点電荷 Q を配置し、 yz 平面に接地した導体の板があるとする。この場合、 $\phi(0, y, z) = 0$ という境界条件が与えられていると考えられる。そこで、仮想電荷を $(-x, 0, 0)$ に $-Q$ を置けば、 $x > 0$ においては与えられた条件と等しくなっているはずである。いま興味のある、すなわち電場を求めたい領域は $x > 0$ であるから、 $x < 0$ は興味がなく仮想電荷を置いても問題ない。これが鏡像法である。これにより、境界条件の代わりに、電荷が $(x, 0, 0)$ と $(-x, 0, 0)$ の2点に置かれた通常の問題に帰結されるため、解くのは簡単である。

2.7.3 静電場の自己力

電荷は電場に置かれると力を受ける。一方で、電荷が存在するとまわりに電場をつくる。それでは、電荷自身がつくりだした電場の力を受けることはあるのだろうか？

その答えは、静電場の場合に限って NO である。すなわち、静電場の場合は自己力を受けない。このことを以下に示す。

局所的な電荷分布 $\rho_1(\mathbf{x})$ と $\rho_2(\mathbf{x})$ を考える。また、それぞれがつくる電場を $\mathbf{E}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ とする。このとき、電荷分布 $\rho_1(\mathbf{x})$ に働く力を考えると、

$$\mathbf{F} = \int_V \rho_1(\mathbf{x}) (\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{x})) d^3x \quad (2.123)$$

である。ここで、自己力 \mathbf{F}_{self} とは、自分自身がつくりだした電場 $\mathbf{E}_1(\mathbf{x})$ によって受ける力である。 $\mathbf{E}_1(\mathbf{x})$ は、Coulomb の法則より次のように書ける。

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \rho_1(\mathbf{x}'). \quad (2.124)$$

よって、自己力は、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{self}} &= \int_V \rho_1(\mathbf{x}) \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) d^3x \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x \int_{V'} d^3x' \rho_1(\mathbf{x}) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \rho_1(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2.125)$$

と表せる。これは、 $\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x}'$ の入れ替えて反対称、 $\mathbf{F}_{\text{self}} = -\mathbf{F}_{\text{self}}$ となる。したがって、

$$\mathbf{F}_{\text{self}} = 0 \quad (2.126)$$

を得る。すなわち、静電場の自己力は相殺され全空間で積分するとゼロになる。

ただし、これは静電場の場合の結論である。時間変動する場合には、電荷分布 $\rho_1(\mathbf{x})$ がつくった電場自体が時間変動し、電磁波として空間を伝播することになる。このような現象は、電磁場の時間変動を考えてから再び議論する。

2.7.4 静電ポテンシャルの多重極展開

ここでは、静電ポテンシャルの多重極展開によって、連続的な電荷分布を離れたところから見た場合にどのような成分から順番に寄与してくるのかを考える。そのために、電荷分布 $\rho(\mathbf{x}')$ が与えられたときに、位置 \mathbf{r} における静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を考える。このとき、 \mathbf{r} と \mathbf{x}' のなす角を θ とする。 $r \gg x'$ の場合を考えたいので、静電ポテンシャルを次のように整理する。

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\sqrt{r^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}') + x'^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{x'}{r} \cos\theta + \left(\frac{x'}{r}\right)^2}} \\ &=: \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{\sqrt{1 - 2ax + x^2}}. \end{aligned} \quad (2.127)$$

ただし、最後に $a = \cos\theta$, $x = x'/r$ とおいた。

$x \ll 1$ の場合、マクローリン展開のうち低次の項のみで静電ポテンシャルを表現できる。それを目指して、まずはマクローリン展開していく。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-X}} \right)^{(k)} \Big|_{X=0} = \frac{1}{k!} \frac{(2k-1)!!}{2^k} \quad (2.128)$$

より、

$$\frac{1}{\sqrt{1-X}} = 1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{8}X^3 + \dots + \frac{1}{k!} \frac{(2k-1)!!}{2^k} X^k + \dots \quad (2.129)$$

と展開できる.

ここで,

$$\begin{aligned} X^k &= (2ax - x^2) = \sum_{\ell=0}^k {}_k C_{\ell} (2ax)^{\ell} (-x^2)^{k-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^k \frac{(-1)^{k-\ell} k!}{\ell!(k-\ell)!} 2^{\ell} a^{\ell} x^{2k-\ell} \end{aligned} \quad (2.130)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-X}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(2k-1)!!}{2^k} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sum_{\ell=0}^k \frac{(-1)^{k-\ell} k!}{\ell!(k-\ell)!} 2^{\ell} a^{\ell} x^{2k-\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \frac{(-1)^{k-\ell} (2k-1)!!}{2^{k-\ell} \ell!(k-\ell)!} a^{\ell} x^{2k-\ell} \end{aligned} \quad (2.131)$$

と書ける.

ここで, $n = 2k - \ell$ とおくことで x^n の展開式とみなす. さらに, $\ell = n - 2m$ とおくことで計算を進める. すなわち,

$$n = 2k - \ell = m + k = (k - \ell) + k, \quad (2.132)$$

$$m = \frac{n - \ell}{2} = k - \ell \quad (2.133)$$

を用いて, 和を書き直すことになる. もともと, ℓ は, $0 \leq \ell \leq k$ の範囲で走る変数であるから,

$$\begin{aligned} 0 &\leq n - 2m \leq n - m \\ \Rightarrow 2m &\leq n \leq n + m \\ \Rightarrow 0 &\leq m \leq n/2 \end{aligned} \quad (2.134)$$

が m の走る範囲である. よって, ガウス記号^{*4}を用いて,

$$\begin{cases} k: & 0 \rightarrow \infty \\ \ell: & 0 \rightarrow k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n: & 0 \rightarrow \infty \\ m: & 0 \rightarrow [n/2] \end{cases} \quad (2.135)$$

の対応によって和を取り直せばよいと分かる.

^{*4} $[n/2]$ とは, $n/2$ を超えない最大の整数を表す. これを表す $[]$ をガウス記号という.

よって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-X}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \frac{(-1)^{k-\ell} (2k-1)!!}{2^{k-\ell} \ell! (k-\ell)!} a^\ell x^{2k-\ell} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (2n-2m-1)!!}{2^m m! (n-2m)!} a^{n-2m} x^n \end{aligned} \quad (2.136)$$

と書ける。ここで、 x^n の係数は、次の Legendre(ルジャンドル) 関数 $P_n(a)$ に一致することが分かる。

$$P_n(t) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (2n-2m-1)!!}{2^m m! (n-2m)!} t^{n-2m} \quad (2.137)$$

したがって,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{x'}{r} \cos \theta + \left(\frac{x'}{r}\right)^2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{x'}{r}\right)^n \quad (2.138)$$

と表せることが分かった。ここで、静電ポテンシャルの多重極展開に戻ると,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{x'}{r} \cos \theta + \left(\frac{x'}{r}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{x'}{r}\right)^n \end{aligned} \quad (2.139)$$

を得る。

Legendre 関数の具体形は,

$$P_0(\cos \theta) = 1, P_1(\cos \theta) = \cos \theta, P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1), P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3 \theta - 3\cos \theta), \dots$$

であるから,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{x' \cos \theta}{r} + \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1) \frac{x'^2}{r^2} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int d^3x' \rho(\mathbf{x}')}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \mathbf{r} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \sum_{i,j=0}^3 3(x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x'^2) r_i r_j}{2r^5} + \dots \\ &=: \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \sum_{i,j=0}^3 Q_{ij} r_i r_j}{2r^5} + \dots \end{aligned} \quad (2.140)$$

と展開される。このように展開したときの各項が、多極子になるのだから一つずつ見ていこう。

まずは、最も単純な単極子で、

$$Q := \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \quad (2.141)$$

はこれまでもよく見てきた全電荷 Q である。

次の項は、双極子であり、

$$\mathbf{p} := \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \mathbf{r} \quad (2.142)$$

で表される \mathbf{p} は電気双極子モーメントと呼ばれる。いまは、電荷が連続分布の場合で考えているが、最も単純な電気双極子は、全電荷がゼロであり、2個の正負の点電荷からなるときにつくられる。点電荷 $+q$ と $-q$ が置かれた場合を考え、 $-q$ から $+q$ の位置に向かうベクトルを ℓ とすると、

$$\mathbf{p} = q\ell \quad (2.143)$$

によって表すことができる。これは電気双極子モーメントの一例である。

さて、電気双極子がつくる電場も求めておこう。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} \right) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} + \frac{\mathbf{p}}{r^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = -\frac{3x(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^5} + \frac{p_x}{r^3} \quad (2.144)$$

などより、

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} \right) = -\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^5} + \frac{\mathbf{p}}{r^3} \quad (2.145)$$

であるから、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^5} \right] + \dots \quad (2.146)$$

と書ける。

したがって、

$$\mathbf{E}_{\text{dipole}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^5} \right] \quad (2.147)$$

が電気双極子がつくる電場である。

最後にさらに複雑になる電気四重極子をみていく。

$$Q_{ij} := \sum_{i,j=0}^3 \left(x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathbf{x}'^2 \right) \quad (2.148)$$

で表される Q_{ij} は電気四重極子モーメントと呼ばれるテンソルである。今回の場合は、 3×3 の行列で次のように表すこともできる。

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}') = \begin{pmatrix} x_1'^2 - \frac{1}{3}x'^2 & x_1'x_2' & x_1'x_3' \\ x_2'x_1' & x'^2 - \frac{1}{3}x'^2 & x_2'x_3' \\ x_3'x_1' & x_3'x_2' & x_3'^2 - \frac{1}{3}x'^2 \end{pmatrix} \quad (2.149)$$

この場合、以下のように計算を進めることができる。

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^3 Q_{ij}r_i r_j &= {}^t \mathbf{r} \mathbf{Q} \mathbf{r} \\ &= (r_1, r_2, r_3) \begin{pmatrix} x_1'^2 - \frac{1}{3}x'^2 & x_1'x_2' & x_1'x_3' \\ x_2'x_1' & x'^2 - \frac{1}{3}x'^2 & x_2'x_3' \\ x_3'x_1' & x_3'x_2' & x_3'^2 - \frac{1}{3}x'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\ &= (r_1, r_2, r_3) \begin{pmatrix} r_1x_1'^2 - \frac{1}{3}r_1x'^2 + r_2x_1'x_2' + r_3x_1'x_3' \\ r_1x_2'x_1' + r_2x_2'^2 - \frac{1}{3}r_2x'^2 + r_3x_2'x_3' \\ r_1x_3'x_1' + r_2x_3'x_2' + r_3x_3'^2 - \frac{1}{3}r_3x'^2 \end{pmatrix} \\ &= r_1^2x_1'^2 - \frac{1}{3}r_1^2x'^2 + r_1r_2x_1'x_2' + r_1r_3x_1'x_3' \\ &\quad + r_2r_1x_2'x_1' + r_2^2x_2'^2 - \frac{1}{3}r_2^2x'^2 + r_2r_3x_2'x_3' \\ &\quad + r_3r_1x_3'x_1' + r_3r_2x_3'x_2' + r_3^2x_3'^2 - \frac{1}{3}r_3^2x'^2 \\ &= (r_1x_1' + r_2x_2' + r_3x_3')^2 - \frac{1}{3}r^2x'^2 \\ &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{x}' - \frac{1}{3}r^2x'^2. \end{aligned} \quad (2.150)$$

これにより、たしかに式 (2.140) の第3項が、この電気四重極子モーメント Q_{ij} を用いて表されることが分かる。この項の r に対する依存性は $\propto 1/r^3$ であり、さらに次の項はまた $1/r^4$ に比例する電気八重極子と続いていき、どんどん表現が複雑になっていく。

以上のように、 $r \gg x'$ のように離れた位置 \mathbf{r} から電荷分布 $\rho(\mathbf{x}')$ を見ると、まずは全電荷 Q が原点にあるとしたときの静電場が見え始める。さらに細かく見ていくと、次に \mathbf{p} による電気双極子による静電場の寄与が見え始める。さらに細かく見ると、次に Q_{ij} の電気四重極子の寄与が見え始める。というように、だんだんと近づくにつれて、電荷の分布が静電場に寄与していく様子が静電ポテンシャルの多重極展開によって表現されている。

2.8 静電場のエネルギー

次に、静電場のエネルギーについて考える。すでに、ポテンシャルを導入する際に、電荷を運ぶ際の仕事について考えた。それを利用して、電荷を運んで帯電体または도체をつくるのに必要な仕事を、静電場のエネルギーとみなしてその表式を導出することができる。

2.8.1 孤立導体の静電容量

まずは半径 a の導体球が電荷 Q を帯びている状況を考える。このときの静電ポテンシャルは、式 (2.49) で得られた電場から、

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \phi(\infty) & (r > a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} & (r \leq a) \end{cases} \quad (2.151)$$

である。ただし、 $r > a$ の場合の境界条件は、 $r \rightarrow \infty$ のときの静電ポテンシャル $\phi(\infty)$ を用いて表した。また、 $r \leq a$ では電場がゼロであるから、静電ポテンシャルは定数であり導体球内部では $\phi(a)$ で一定となる。

ここで、半径 a の導体球がもつ静電エネルギーを考える。そのために、無限遠から電荷を運び、この導体球をつくる仕事を考える。そこで、まず電位差を 1 V だけ上げるのに必要な電荷は、

$$C := \frac{Q}{\phi(a) - \phi(\infty)} = 4\pi\epsilon_0 a \quad (2.152)$$

で表せることが分かる。これは、導体を構成する物質によらず、幾何学形状 (a) を反映した値となり、孤立導体の静電容量という。この値により、どれだけ電荷を運ぶと電位が変わるかが決定される。

2.8.2 導体球の静電エネルギー

次に、導体球の電荷分布を変えないくらいの微小な電荷 Δq を、無限遠から導体表面 $r = a$ まで運ぶことを考える。このときの仕事 ΔW は、式 (2.79) と同様に、

$$\begin{aligned} \Delta W &:= -\Delta q \int_{\infty}^{r=a} \mathbf{E}(z) \cdot dz = \Delta q \int_{\infty}^{r=a} \text{grad } \phi(z) \cdot dz \\ &= \Delta q (\phi(a) - \phi(\infty)) = \frac{q\Delta q}{C} \end{aligned} \quad (2.153)$$

と書ける。これを繰り返して、最終的に電荷が Q になるまで行くと、

$$W = \int dW = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} =: U_e \quad (2.154)$$

を得るが、これが導体の持つ静電エネルギー U_e だと言える。

2.8.3 静電場のエネルギー

次に、この見方を変えて、導体自体がもつ静電エネルギーではなく、電場による空間の歪みがエネルギーを持つと考え、電場を用いた表式にする。まず、上式で $\phi(\infty) = 0$ と基準を決めれば、 $C\phi(a) = Q$ となるから、

$$U_e = \frac{1}{2}\phi(a)Q \quad (2.155)$$

と書ける。更に、導体球面を細かく区切り ΔS_a とし、その微小面に分布する電荷面密度を σ_a とすれば、

$$U_e = \sum \Delta U_e = \frac{1}{2} \sum_a \phi(a) \sigma_a \Delta S_a = \frac{1}{2} \int \phi(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3x \quad (2.156)$$

とも表せる。また、導体球に Gauss の法則を適用することにより、 $E_a \Delta S_a = \sigma_a \Delta S_a / \epsilon_0$ を得る。導体球面以外には電荷が存在しないため、導体球面から半径が Δx_a だけ大きくなった球面、更に半径が Δx_1 だけ大きくなった球面、更に半径が Δx_2 だけ大きくなった球面、と無限遠まで考えると、

$$\frac{\sigma_a}{\epsilon_0} \Delta S_a = E_a \Delta S_a = E_1 \Delta S_1 = E_2 \Delta S_2 = \dots \quad (2.157)$$

となる。これを利用すると、

$$\begin{aligned} \Delta U_e &= \frac{1}{2} \phi(a) \sigma_a \Delta S_a \\ &= \frac{1}{2} \frac{\phi_a - \phi_1}{\Delta x_a} \sigma_a \Delta S_a \Delta x_a + \frac{1}{2} \frac{\phi_1 - \phi_2}{\Delta x_1} \sigma_a \Delta S_a \Delta x_1 + \frac{1}{2} \frac{\phi_2 - \phi_3}{\Delta x_2} \sigma_a \Delta S_a \Delta x_2 + \dots \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\phi_a - \phi_1}{\Delta x_a} E_a \Delta S_a \Delta x_a + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\phi_1 - \phi_2}{\Delta x_1} E_1 \Delta S_1 \Delta x_1 + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\phi_2 - \phi_3}{\Delta x_2} E_2 \Delta S_2 \Delta x_2 + \dots \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} E_a^2 \Delta^3 x_a + \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 \Delta^3 x_1 + \frac{\epsilon_0}{2} E_2^2 \Delta^3 x_2 + \dots \\ &= \sum_i \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2 \Delta^3 x_i \end{aligned} \quad (2.158)$$

を得る。ただし、 $\Delta^3 x_i := \Delta S_i \Delta x_i$ とした。

したがって、

$$U_e = \sum \Delta U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) \quad (2.159)$$

の表式を得る。ただし、最後の積分は全空間にわたって行う。

以上の結果をまとめると、静電エネルギーは次の3通りの表現ができると分かった。

静電エネルギー

$$U_e = \frac{Q^2}{2C}, \quad (2.160)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int \phi(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3x, \quad (2.161)$$

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \mathbf{E}^2(\mathbf{x}). \quad (2.162)$$

2.8.4 一様帯電球の静電エネルギー

これまでは導体球で考えたが、これらの表式を確認しながら帯電体の場合の静電エネルギーを求める。半径 a の一様帯電球がもつ静電エネルギーを考える。そのためには、何もない(すなわち静電エネルギーがゼロの)状態から、無限遠の微小電荷を運び帯電球を創り上げるために必要な仕事を計算すればよい。

半径 a の一様帯電球をつくるために、無限遠から厚さ dr の非常に薄い球殻電荷を運ぶことを考える。この電荷は、

$$dQ = \rho 4\pi r^2 dr \quad (2.163)$$

と書ける。このとき、一様帯電球が半径 $r' < a$ まで出来上がっているとすると、その外部における静電ポテンシャルは式 (2.117) で得られている通り、

$$\phi(r) = \frac{\rho r'^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2.164)$$

と書ける。特に、表面における静電ポテンシャルは $\phi(r')$ である。よって、無限遠から表面 $r = r'$ まで微小電荷 dQ を運ぶのに必要な仕事は、式 (2.79) より、

$$\begin{aligned} dU_e = dW &= dQ (\phi(r') - \phi(\infty)) \\ &= \rho 4\pi r'^2 dr' \cdot \frac{\rho r'^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r'} = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} r'^4 dr' \end{aligned} \quad (2.165)$$

を得る。

さらに、これを $r' : 0 \rightarrow a$ となるまで繰り返して、半径 a の一様帯電球をつくる。

$$U_e = \int_0^a dU_e = \int_0^a \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} r'^4 dr' = \frac{3}{5} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a} = \frac{3}{5} Q \phi(a). \quad (2.166)$$

次に、第2の公式である $U_e = \frac{1}{2} \int \phi(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3x$ によって求めてみる。これは球面座標系

(r, θ, ϕ) で計算すればよい.

$$\begin{aligned}
 U_e &= \frac{1}{2} \int \phi(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3x \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta r^2 \sin \theta \phi(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta r^2 \sin \theta \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{r^2}{a^2}\right) \rho \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{2\varepsilon_0} 4\pi \int_0^a r^2 \left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right) dr \\
 &= \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0} a^5 = \frac{3}{5} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}
 \end{aligned} \tag{2.167}$$

となり, 式 (2.166) の結果と一致する.

式 (2.47) より,

$$\begin{aligned}
 U_e &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3x \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{2} 4\pi \int_0^a \left\{ \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \right\}^2 r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2} 4\pi \int_a^\infty \left\{ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right\}^2 r^2 dr \\
 &= 2\pi\varepsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 a^6} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a + 2\pi\varepsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^\infty \\
 &= \frac{1}{5} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \\
 &= \frac{1}{5} \frac{1}{2} Q\phi(a) + \frac{1}{2} Q\phi(a) = \frac{3}{5} Q\phi(a)
 \end{aligned} \tag{2.168}$$

となり, 式 (2.166) と式 (2.167) と一致する.

2.8.5 導体球と一様帯電球の静電エネルギーの違い

ここで, 最後に $U_e^{\text{帯電球}} = \frac{3}{5} Q\phi(a)$ について考察する. はじめに半径 a の導体球の静電エネルギーを求めたときは式 (2.155) より $U_e^{\text{導体}} = \frac{1}{2} Q\phi(a)$ であった. すなわち, 一様帯電球の場合には導体球よりも 1.2 倍だけ静電エネルギーが大きい. 電場に戻って考えると, 半径 a の外側では導体球でも一様帯電球でも等しい電場と静電ポテンシャルとなっているため区別がない. これらの違いが生じるのは球内部であり, 導体球は内部に電場がゼロとなっている一方で, 一様帯電球では内部にも一様な電荷分布が存在し有限の電場が存在している. この寄与がまさに式 (2.168) に現れている. $a < r < \infty$ の領域だけで静電エネルギーを考えると, やはり $U_e(r > a) = \frac{1}{2} Q\phi(a)$ である. そこに, $0 < r < a$ の領域の電場による静電エネルギーの寄与によって, $U_e(r < a) = \frac{1}{10} Q\phi(a)$ が付加され, 導体球よりも大きな静電エネルギーをもつ.

2.9 誘電体

2.9.1 誘電分極

これまでは、真空中の電荷と、導体のみを扱ってきた。次に、ここでは誘電体を扱う。これは電気を通しにくい性質をもつ物質であり、絶縁体(不導体)と似ている*⁵。ここにおける誘電体とは、導体とは異なり電場をかけたときに内部で電子が自由に動き回ることができない物質であると考えればよい。

物質は原子によって構成されており、その原子は正の電荷をもつ原子核と、負の電荷をもつ電子によって構成されている。この物質をこれから誘電体と呼ぶ。この誘電体を電場の中に置くと、中の原子が分極する。導体の場合には、電場によって自由電子が速やかに移動し、内部の電場を完全に打ち消すことで静電遮蔽される。一方で、誘電体の場合には、内部で電子がゆっくりと移動するだけであり、電場を弱める方向に変化するものの完全に打ち消しはしない。つまり、誘電体中で分極することによって多数の電気双極子を形成する。この現象を、誘電分極という。

2.9.2 分極ベクトルと電束密度

電場により内部の分極で $+q$ と $-q$ の電荷が ℓ だけ離れると、式 (2.143) で導入した $\mathbf{p} = q\ell$ の電気双極子モーメントが現れる。単位体積あたりの原子数を N_a とすると、電荷密度は $\rho = \pm qN_a$ と表される。ここで、誘電体中に適当な断面積 S を考えると、分極によって断面積 S に現れた分極電荷は、

$$\rho S \cdot \ell = \pm qN_a S \cdot \ell = \pm N_a \mathbf{p} \cdot \mathbf{S} = \pm \sigma_p |\mathbf{S}| \quad (2.169)$$

と書ける。ここで、分極ベクトル \mathbf{P} を電気双極子モーメント \mathbf{p} によって

$$\mathbf{P} := \mathbf{p}N_a \quad (2.170)$$

と定義する。分極ベクトルは、大きさが分極電荷の面密度に等しく ($|\mathbf{P}| = \sigma_p$)、分極によって生じる電気双極子の総量を表す量になっている。

この分極ベクトルの意味は、単位面積を通過する正電荷の大きさと向きであると解釈できる。この場合、分極の際に断面 S を通過する全電荷の総量は、

$$\int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.171)$$

*⁵ 実際にはその特徴によって、周波数特性が異なる。直流の場合には、どちらも電気を通さない。一方で、交流の場合には、絶縁体では変わらず電気を通さないが、誘電体でできたコンデンサの場合はインピーダンスが周波数に依存するため電気を通す場合がある。

によって表される。また、この面を誘電体内で少しずらした位置の S' に移動したとすると、その面を通過する全電荷量は、

$$\int_{S'} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}' \quad (2.172)$$

と表される。一方で、 S と S' で囲まれた領域における電荷の総量はゼロのはずである。なぜなら、分極によって電荷分布が実際に変わるのは誘電体の表面のみであり、内部では電氣的に中性を保った上で分極するだけだからである。すなわち、誘電体内の任意の面 S と S' に対して、

$$\int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S'} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}' \quad (2.173)$$

が成立する。

次に、実際に誘電体の端に現れる電荷 (分極電荷) について考える。ここで、例として $Q_e > 0$ で帯電している導体を考え、そのまわりを誘電体が満たしているとする。この場合は、分極の結果として導体表面に負電荷が生じる。一方で、正電荷は無限遠に生じることになるため、その影響は無視することができる。導体表面を S_0 とするならば、そこに生じる負の分極電荷は、

$$- \int_{S_0} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}_0 \quad (2.174)$$

である。

以上のことを踏まえて、この導体を囲む任意の閉曲面 S を考えて Gauss の法則を適用すると、

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(Q_e - \int_{S_0} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}_0 \right) \quad (2.175)$$

が成立する。これまでは特に意識していなかったが、 Q_e は分極を考えずに導体に帯電させた真の電荷であるから、真電荷ともいう。右辺では、真電荷 Q_e から分極によって生じる負の分極電荷の分だけ電荷が小さくなり、それにしたがって電場も弱められることが分かる。また、先ほどと同じ議論から S_0 と S に囲まれた領域の電荷の総量はゼロであることから、 S_0 における面積分は S における面積分に変換することができる。よって、

$$\int_S (\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{S} = Q_e \quad (2.176)$$

が成立する。

ここで、

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) := \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (2.177)$$

によって定義される $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ を電束密度 (electric flux density) という.

これを用いると, 誘電体中においても有効な Gauss の法則:

$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = Q_e \quad (2.178)$$

が得られる.

2.9.3 誘電体中の静電場の基本法則

また, 実験結果から多くの誘電体では $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{x})$ の関係があることが知られている. ここで, χ_e を電気感受率という. この関係を利用すると,

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = (\epsilon_0 + \chi_e) \mathbf{E}(\mathbf{x}) =: \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (2.179)$$

のように誘電率 ϵ を用いて電場との比例関係を表せる. 真空の場合には $\chi_e = 0$ であるから, ϵ_0 を真空の誘電率とこれまで呼んでいたのである.

また, 真空中の議論と全く同様にして Gauss の定理を用いることで微分形の Gauss の法則:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho_e(\mathbf{x}) \quad (2.180)$$

および, 時間変動する場合にも,

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho_e(\mathbf{x}, t) \quad (2.181)$$

が成立する.

また, もう一つの静電場の基本法則 $\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ については, 誘電率に関係しないため, 誘電体中においても同様に成立する. したがって, 誘電体中の静電場の基本法則は,

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho_e(\mathbf{x}), \quad (2.182)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.183)$$

である. よって, この他にもこれまで真空中の場合に得られた結果に対して, $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ と形式的に置き換えれば誘電体中の表式が得られる.

2.9.4 異なる誘電体間の境界における接続条件

異なる誘電体が接している場合に, それらの境界における接続条件についてここで整理しておく. 結果を先に述べると, 境界に対して, 電束密度 \mathbf{D} は法線方向に連続であり, 電場 \mathbf{E} は接線方向に連続である. これから, その導出を行う.

誘電率 ϵ_1, ϵ_2 の誘電体の境界に対して、図 2.14 のようにそれをまたぐ薄い円柱を考えて Gauss の法則を適用する。円柱内部の電荷の総量はゼロであるから、円柱の上面および底面の面積を ΔS として、

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S = 0. \quad (2.184)$$

よって、

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.185)$$

となり、電束密度 \mathbf{D} は境界の法線方向に連続であることが分かる。一方で、電場の表記になおすと、

$$(\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.186)$$

となっており、電場 \mathbf{E} は法線方向に連続ではない。

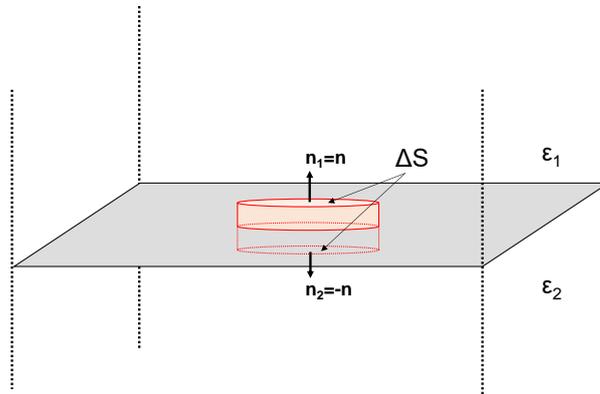


図 2.14 電束密度 \mathbf{D} の法線方向連続性

次に境界の接線方向について考える。今回は先ほどの円柱の断面を切って図 2.15 のような 2 次元の閉曲線 C を考える。すると、 $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ より、Stokes の定理からこの閉曲線 C に沿った線積分は 1 周でゼロになる。よって、誘電体内で境界線と平行なベクトルをそれぞれ $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ として、 C のうちこの平行な部分の長さを Δr とすれば、

$$0 = \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_1 \Delta r + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_2 \Delta r \quad (2.187)$$

より、

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (2.188)$$

を得る。したがって、電場 \mathbf{E} は接線方向に連続であると言える。一方で、電束密度にすると、

$$\left(\frac{\mathbf{D}_1}{\epsilon_1} - \frac{\mathbf{D}_2}{\epsilon_2} \right) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (2.189)$$

となるから、電束密度 D は接線方向に連続ではない。

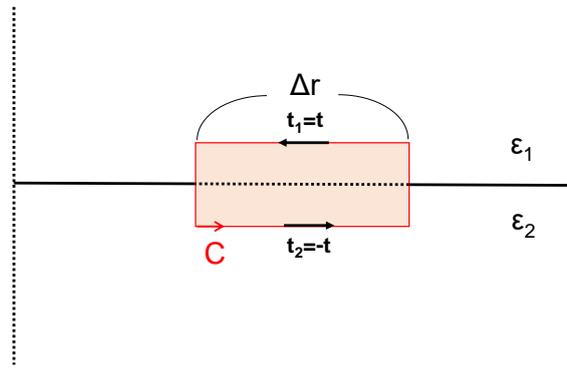


図 2.15 電場 E の接線方向連続性

2.9.5 電場の屈折の法則

また、これらの誘電体の境界における接続条件から、電場の屈折の法則を導くことができる。図 2.16 のように、誘電率 ϵ_1 の物質中から入射角 θ_1 で入射した電場 E_1 が、誘電率 ϵ_2 の物質中に入ると電場 E_2 は出射角 θ_2 で伝播する。このとき、電場の接線方向連続性と、電束密度の法線方向連続性から、

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2, \quad (2.190)$$

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta \quad (2.191)$$

となる。これらの辺々の比をとることで、

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \text{Const.} \quad (2.192)$$

を得る。これを屈折の法則という。

2.9.6 コンデンサの静電容量

真空中に導体を置いたときに、孤立導体の静電容量が式 (2.152) のように与えられることを見た。ここで、導体を 2 つ置き、大きさが等しく逆符号をもった電荷をそれぞれに帯電させる。このとき、正の電荷を帯びた導体 A から、負の電荷を帯びた導体 B に向かって電場が形成される。このような系をコンデンサと呼ぶ。コンデンサの静電容量は、これらの導体間の電位差 $\phi(A) - \phi(B)$ を 1 V だけ上昇させる電荷量 [C] と定義し、

$$C_{AB} := \frac{Q}{\phi(A) - \phi(B)} \quad (2.193)$$

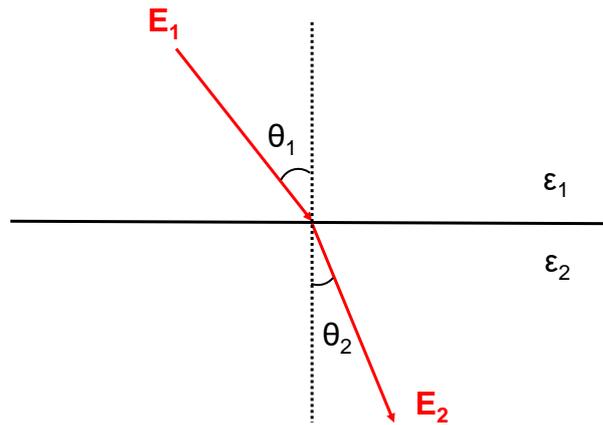


図 2.16 誘電体を通過する際の電場の屈折

とする．また，この単位を F (ファラド) という．いまの MKSA 有理単位系においては，

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}^{-1} = 1 \text{ A}^2 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \quad (2.194)$$

と表される．また，このときに導体 B を無限遠に遠ざけると， $\phi(B) \rightarrow \phi(\infty)$ となるから，孤立導体の静電容量に一致する．

[例題] (再掲) 一様帯電平行平板 (コンデンサ) のつくる電場

ここで，すでに一度考えた例題であるが，再び平行平板コンデンサについて考える．

xy 平面上に，面密度 $+\sigma$ で一様に帯電させた無限に広く面積 S で厚さの無視できる平板を置く．さらに， $z = -d$ の面に，面密度 $-\sigma$ で同様に帯電させた平板を置く．これらのつくる電場を求める．ちなみに，これは距離 d だけ離れた無限の広さをもつコンデンサとみなせる．また，このコンデンサの間に誘電率 ε の誘電体を挿入しておく．

今回は以前の無限に広い板ではなく，面積 S の有限の大きさをもつ板であるから，電荷面密度は $\sigma = Q/S$ と書ける．電場はすでに式 (2.56) で導出したように，

$$E(z) = -\frac{Q}{\varepsilon S} \quad (-d \leq z \leq 0) \quad (2.195)$$

と書ける．このとき，静電ポテンシャルは，

$$\phi(z) = \left(\frac{Q}{\varepsilon S} \right) z + \text{Const.} \quad (2.196)$$

であるから，

$$C := \frac{Q}{\phi(0) - \phi(-d)} = \varepsilon \frac{S}{d}. \quad (2.197)$$

また、真空中の場合のコンデンサの静電容量は、

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (2.198)$$

である。これは、高校物理でも扱うコンデンサの基本公式であるが、経験的な式ではなくこのような過程によって導出することができるのである。

2.9.7 コンデンサ (一様電場) が誘電体を引き込む力

最後に、コンデンサに誘電体を近づけると引き込まれる現象を説明する。これは一様電場中に人間 (誘電体) が近づくと吸い込まれることを意味しており、実験施設などで作業する際には注意をすべき内容である。この現象を、これまでの知見に基づいて定性的に説明する。まず Faraday が、コンデンサの電極板の間に誘電体を挿入した際に、静電容量が増加することを発見していた。これは、次のように説明できる。まず、コンデンサにもともとあった電場の中に誘電体を挿入したために、分極が起こり電場が弱められる。したがって、同じ電場を保つためには電極からより多くの電荷を供給する必要がある、結果として静電容量が大きくなるのである。または、電荷 Q を一定に保つのであれば、内部の電場が誘電体によって弱められ電位差が小さくなるため静電容量が大きくなることも説明できる。いずれにせよ、コンデンサに誘電体を挿入すると、静電容量が増大する。

次に、静電エネルギーの変化に着目して、コンデンサに誘電体を挿入することを考える。すると、 $U_e = Q^2/2C$ であるから、もしも電荷 Q を一定に保つのであれば静電容量が大きくなった方がエネルギー的に得をするため誘電体を引き込むことになる。または、電場を一定に保つのであれば $U_e = C\phi^2/2$ より、やはり誘電体を挿入した方が静電容量が大きくなるためエネルギー的に得をすることになり、誘電体を引き込むのである。

以上は定性的な説明ではあったが、エネルギーの具体的な表式も既知のため定量的に評価するのは難しくないはずである。誘電体の有無によるエネルギー差の勾配から生じる力は、誘電体を引き込む電磁気力に他ならない。

2.10 静電場の基本法則

これまでに得られた静電場の基本法則を整理してこの章を終える。

真空中の静電場の基本法則

式 (2.70), 式 (2.106) より,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}, \quad (2.199)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (2.200)$$

誘電体中の静電場の基本法則

式 (2.179), 式 (2.182), 式 (2.183) より,

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad (2.201)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho_e(\mathbf{x}), \quad (2.202)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (2.203)$$

第 3 章

静磁場

3.1 磁石の研究

磁石に関する研究もまた、古代から続いてきた。紀元前 600 年頃、中国では天然の磁鉄鉱（マグネタイト）が鉄を引き寄せる性質が知られており、これは後に羅針盤として利用され、航海術に革命をもたらした。しかし、この磁気の現象の本質は長い間不明瞭であり、単なる経験的な知識にとどまっていた。

1600 年、イギリスの科学者 W. Gilbert は『デ・マグネテ』を著し、磁気の研究において大きな進展をもたらした。彼は、磁石が持つ性質を科学的に研究し、地球そのものが巨大な磁石であると提唱した。彼の研究は、磁気を体系的に理解するための第一歩となったが、磁場の源についての完全な理解には至らなかった。

そして、19 世紀に入ると、磁場研究において重要な転換点が訪れる。1820 年、デンマークの物理学者 H. Oersted(エルステッド) が、電流が磁場を生じることを発見したのである。この発見は、磁場の理解において画期的なものであり、それまでの磁石に基づく磁気研究を一変させた。Oersted の実験では、電流が流れる導線の近くに置いたコンパスの針が動くことが確認され、電流が磁場を生成することが初めて明らかになったのである。

この発見は、磁場の源が単に磁石だけでなく、電流によっても生じることを示しており、電磁気学の誕生を意味するものである。ここで重要なのは、磁場を理解するためには、まず電流の性質を理解する必要があるということである。磁場は電流によって生成されるため、電流に関する知識がなければ、磁場を正しく説明することはできない。

続いて、A. Ampère は、この電流と磁場の関係を数式で表し、Ampère の法則を提唱した。この法則は、電流が磁場を生み出し、その磁場が他の電流に力を及ぼすことを定量的に示している。この研究は、電磁気学の基礎を築き、後に Maxwell による電磁気理論の統一へとつながる重要なステップとなった。

そこで、このようにして発展してきた磁場の研究を学ぶために、まずは次節から定常電流に関する理論を整理することにする。定常電流とは、時間とともに変化しない一定の電流で

あり、この電流が作り出す磁場の特性を理解することが、磁場そのものをより深く学ぶための基礎となるのである。

3.2 定常電流

磁場の研究は、電流に基づいて定式化する必要がある。ここでは、その準備として定常電流の理論をまとめることとする。このアプローチをとる理由は、静電場の場合に電荷が直接影響を受ける電場の研究が可能であったのに対し、静磁場においては磁荷に対応するものが存在しないためである。この点に関しては、磁場の定式化を済ませた後に改めて振り返ることにする。

3.2.1 定常電流の定義

定常電流とは、電子の流れによってつくられる電流が時間変化しない場合のことを指す。このとき、電子は動いているのだが定常的に存在する電流とみなすことができる。時間変化する電流を考えると、非定常電流として区別して取り扱う。本節ではあくまで磁場の記述のために必要な定常電流の理論を整理するものであり、磁場そのものはまだ取り扱わない。定常電流では時間的な変化がないが、これまで扱ってきた静電場とはやや異なることに注意されたい。

これまでの静電場で取り合ったコンデンサの両極を接続すると、一瞬だけ放電するものの安定して電流を取り出すことはできなかった。しかし1796年頃に、A. Voltaが発明した電池により、安定な電流を取り出すことができるようになった。この発明により、定常電流の理解が進み、のちに磁場の研究へと繋がり電磁気学が大きく発展したことはすでに述べた通りである。

電子の流れによって作り出される電流の単位は、MKSA有理単位系においてはA(アンペア)として基本単位として用意されている。すでに説明した通り、電荷の単位Cは電流の単位Aを通して定義される量である。

$$1 \text{ A} =: 1 \text{ C/s.} \quad (3.1)$$

ここで、単位面積の断面を通過する電流の強さを電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$ と定義する。この電流密度の空間分布が時間に依存しないとき、すなわち $\mathbf{i} = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$ のとき、この電流を定常電流という。

3.2.2 定常電流の保存則

実験結果によると、次の定常電流の保存則が成立することが分かっている。

定常電流の保存則 (実験結果)

定常電流 $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ が通過する領域 V を考える。このとき、この領域の境界を ∂V とすれば以下が成立する。

$$\int_{\partial V} \mathbf{i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) \, dS = 0. \quad (3.2)$$

これはつまり、領域 V に入ってくる電流の量と、出ていく電流の量が等しいことを意味している。

また、ここで Gauss の定理を適用して体積積分に変換すると、

$$\int_{\partial V} \mathbf{i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}) \, d^3x = 0 \quad (3.3)$$

を得る。ここで、領域 V は任意にとれるから、各点 \mathbf{x} において以下が成立する。

微分形の定常電流の保存則

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.4)$$

3.2.3 Ohm の法則

G. Ohm (オーム) は、導体上の2点間の電位差と、そこに流れる電流の関係を実験によって導出した。

Ohm の保存則 (実験結果)

導線上の電位差を $\phi_1 - \phi_2 > 0$ とする。このとき、2点間に流れる電流の強さ I は次ような関係がある。

$$I = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R} \quad (3.5)$$

ここで、 $R > 0$ は定数であり、電気抵抗と呼ぶ。

また、この電気抵抗 R は

電気抵抗の表現 (実験結果)

導線の長さ ℓ 、断面積 S とすると電気抵抗 R は次のように表せる。

$$R = \rho \frac{\ell}{S}. \quad (3.6)$$

ただし、 $\rho > 0$ は定数であり、電気抵抗率と呼ぶ。

また,

$$\sigma := \frac{1}{\rho} \quad (3.7)$$

によって定める σ は電気伝導率と呼ぶ.

この Ohm の法則をまた微分形に変えて, 近接作用の表現を考える. そのために, 長さ Δx , 断面積 ΔS の微小円柱型導線を考える. このとき, Ohm の法則より,

$$I = - \left| \frac{(\phi + \Delta\phi) - \phi}{\Delta R} \right| = - \frac{\Delta\phi}{R} \quad (3.8)$$

となる. ただし, いまは電流の向きにも注意したいので, $\Delta\phi > 0$ として電位が大きくなる向きを正とした場合に電流は負になる. 一方で,

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta x}{\Delta S} \quad (3.9)$$

と書けるため,

$$I = i\Delta S = -\Delta\phi \frac{\sigma\Delta S}{\Delta x} \quad (3.10)$$

である. よって,

$$i = -\sigma \frac{\Delta\phi}{\Delta x} \quad (3.11)$$

を得る. これはすなわち,

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}) = -\sigma \text{grad } \phi(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

を意味する*1.

また, 電位, すなわち静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ は静電場に対して次の関係があった.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{x}). \quad (3.13)$$

最初に注意を述べたように, いまは定常電流を扱っており電子が動いているので静電場とはみなせない. 少しだけ先取りすると, 時間変動する場合には,

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

が成立するのであった. 今回は“定常”の場合を考えているため $\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}$ である. そのため, 形式的には, 静電場のときと同様に

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

*1 $\phi(\mathbf{x})$: 温度分布, $\mathbf{i}(\mathbf{x})$: 熱の流れ密度, σ : 熱伝導率, の対応によって熱伝導の法則と等価である. すなわち, Ohm の法則は熱伝導の法則ならぬ電気伝導の法則である.

となるから同じ議論により Stokes の定理を経由してポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ を導入できる： $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{x})$. ただし、静電ポテンシャルの場合は導体内では電場が存在せず $\phi(\mathbf{x})$ はいたるところで一定であった。しかし、いまは導体であるが導線上では電位差があり、明らかに一定ではない。逆に言えば常に電位差が存在するからこそ、電流が流れ続けるのである。この意味で、もはや $\phi(\mathbf{x})$ は静電ポテンシャルとは呼べないので、電位と呼ぶ。これを用いると、微分形の Ohm の法則が得られる。

微分形の Ohm の保存則

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (3.16)$$

3.2.4 Ohm の法則の電子論的考察

静電場のときに導体考えた際には、電荷が導体表面に集まること分かった。導体内部では自由電子が動くために静電場であるという定義から、導体内部の電場はゼロにならなければいけないからであった。一方で、いま考えている定常電流では、Ohm の法則で示す通り電流の流れやすさを決める電気抵抗が導線の断面積に反比例する。すなわち、導線の表面を自由電子が動くのではなく、導線内部を動いていると考えるのが自然である*2。

電子の運動方程式として、以下の形を考える：

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v}. \quad (3.17)$$

ここで、まず電子の質量は m 、電荷は e である。導線内の電場 \mathbf{E} によって $e\mathbf{E}$ の Coulomb 力がはたらく。一方で、導線内で移動することで原子と衝突することで速さ \mathbf{v} に比例する抵抗力が働くはずである。この抵抗力による速度変化は、 $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{v}}{\tau}$ と表現できる。この τ を緩和時間という。

これが定常状態になると、両辺がゼロになるから、

$$\mathbf{v} = \left(\frac{e\tau}{m} \right) \mathbf{E} \quad (3.18)$$

で運動を続けることになる。

ここで、導線中の単位体積あたりの自由電子数を N_e とすると、単位時間あたりに単位面積を通過する電荷量は電流密度のことであるから、

$$\mathbf{i} = N_e e \mathbf{v} = \frac{N_e e^2 \tau}{m} \mathbf{E} =: \sigma \mathbf{E} \quad (3.19)$$

*2 電流の流れやすさが断面積 S に比例することを意味しているからである。導線の表面しか動けないのなら断面積ではなく側面を表す半径 r に比例するはずである。

と書ける。最後の関係から、電気伝導率 σ は自由電子の数 N_e に比例することが分かる。そのため、前節で得られたように電気抵抗が導線の断面積に反比例していたと理解できる。

また、具体例として導体である銀の電気伝導率は $10^8 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ほどであるのに対し、絶縁体のコハクでは $10^{-14} \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ほどであり、両者は 10^{22} も異なることになる。これらの違いは、自由電子の数に由来しており、アボガドロ定数が反映されているためにこれほどの大きな差が生じるのである。

3.2.5 Joule の法則

2 点間 $P \rightarrow Q$ で電荷 e を運ぶ際の仕事は、 $\phi(Q) > \phi(P)$ として、式 (2.79) より、

$$W = e[\phi(Q) - \phi(P)] =: e\Delta\phi \quad (3.20)$$

と書ける。これをもとに電流が流れたときの仕事を考える。電流が I であれば、それは単位時間あたりに I だけの電荷を運ぶことを意味する。すなわち、このときの仕事は、

$$W = I\Delta\phi \quad (3.21)$$

と表せる。一方で、式 (3.5) の Ohm の法則より、 $RI = \Delta\phi$ であるから以下が成立する。

Joule の法則

$$W = RI^2 = \frac{(\Delta\phi)^2}{R}. \quad (3.22)$$

これは電流が流れた際に、これだけの仕事が導線の 2 点間にジュール熱として発生することを示している。

Ohm の法則と同様に、これはまだ遠隔作用的表現である。微小な導線を考えて、再び長さ Δx 、断面 ΔS とする。このとき、電流の向きに注意すると電位の上昇とは逆に流れるため、

$$W = w\Delta S\Delta x = -i\Delta S\Delta\phi \quad (3.23)$$

である。定常電流の場合は、 $E = -\Delta\phi/\Delta x$ としてよいので、 $w = iE$ を得る。ベクトル形式にすれば、次の微分形の Joule の法則が得られたことになる。

微分形の Joule の法則

$$w(\mathbf{x}) = \mathbf{i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (3.24)$$

3.2.6 起電力がある場合の Ohm の法則

閉じた導線回路 C を考える。このとき、Ohm の法則から電場の 1 周線積分から電流の 1 周線積分もゼロになってしまう。

$$0 = \oint_C \text{grad } \phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = - \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = - \oint_C \frac{1}{\sigma} \mathbf{i}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.25)$$

これでは、閉回路では常に電流が流れないことになってしまう。それはある意味で正しい。通常の導線を繋げただけで勝手に電流が生じることはない。

閉回路で電流がある場合には、電池などによる起電力がどこかに存在するはずである。そして、その起電力を生じている部分に関しては、上の考察から $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ では表せない電場 \mathbf{E}^{ex} が存在するはずである。つまり、

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}) = \sigma [\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}^{\text{ex}}(\mathbf{x})] \quad (3.26)$$

と修正される。

よって、式 (3.25) は次のように修正される。

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{\sigma} \mathbf{i}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= - \oint_C \text{grad } \phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \oint_C \mathbf{E}^{\text{ex}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \oint_C \mathbf{E}^{\text{ex}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} =: \phi^{\text{ex}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

ここで定義された ϕ^{ex} を起電力といい、単位は電位と同じく V である。

3.2.7 定常電流の基本法則

これまで得られた定常電流の基本法則は次の通りである。

定常電流の基本法則

式 (3.16), 式 (3.4), 式 (3.15) より,

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad (3.28)$$

$$\text{div } \mathbf{i}(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.29)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.30)$$

一方で、これは電荷分布 $\rho_e(\mathbf{x}) = 0$ のときの静電場の基本法則：

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad (3.31)$$

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.32)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.33)$$

と非常によく似ている。

ただし、電場 \mathbf{E} については、静電場と、定常電流の場合の導線中の電場は異なるのだった。とはいえ、これら2つの方程式系を考えると、

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

は共通している。すなわち、同じ境界条件を課せば、本質は異なるものの全く同一の分布となる。この意味で、静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ と電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ が関係づけられる： $\mathbf{i}(\mathbf{x}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x})$ 。したがって、静電場解析の手法として、電流密度の分布を測定するという電解槽法というものがある。

3.2.8 静電容量と電気抵抗の関係

コンデンサにおいて、静電容量 C と電気抵抗 R の関係について考察する。コンデンサの片側の極に着目すると、外側表面のみに電場が存在する。ここで、この極の外側と内側を通る曲面 S を考えて Gauss の法則を適用すると、以下が成立する。

$$Q = \varepsilon \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{\varepsilon}{\sigma} \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{\varepsilon}{\sigma} I. \quad (3.35)$$

ここで、2つ目の等号ではある思考実験を行っている。最初はコンデンサの極板間には誘電率 ε の誘電体で満たされていると仮定したため、電場 \mathbf{E} が生じている。その誘電体を取り除き、導体に入れ替えれば電気伝導率 σ で電流 \mathbf{i} が流れはじめる。この入れ替えの過程では、コンデンサの極板間電位差 $\Delta\phi$ は保つとすると、Ohm の法則より上式が成立する。

つまり、

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{I}{\Delta\phi} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{1}{R} \quad (3.36)$$

が成立するから、

$$CR = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (3.37)$$

の関係が得られる。

3.3 定常電流がつくる磁場

前節では、磁場の記述に必要な定常電流についての基本事項を整理した。ここから、いよいよ磁場について考えていく。ここでは、時間変動しない磁場のことを静電場に対応させて静磁場というが、定常電流がつくる磁場という意味である。

3.3.1 静磁場の導入

もちろん磁石が存在するときそのまわりにつくられるのは磁場といえる。しかし、ここでは本章の最初に述べた通り電流がつくる磁場という形で議論を進めていく。実験事実として、1つの導線に定常電流を流すと、近くで同様に定常電流が流れる導線があると、力を受けることが知られていた。この場合は、定常電流がまわりに磁場をつくり、その磁場が近くの定常電流に対して力を与えていると考えられる。この場の概念については、静電場のとき同様である。磁場の場合には磁荷に働く力から磁場を分離することができないため、磁場を先に用意してしまう。その上で、電流が磁場から受ける力である Ampère の力と、電流が磁場をつくる法則の Biot-Savart の法則を紹介することにする。静磁場の導入方法が静電場と対応していることは、Biot-Savart の法則を紹介してから再び考えることにする。

3.3.2 Ampère の力

まず最初に紹介する Ampère の力とは、磁場 \mathbf{B} が存在する場合に、定常電流 I に働く力のことである。導線の微小長さ Δs に働く力 ΔF は、実験によると $|\Delta F| = BI\Delta s$ で、その力の向きは磁場と電流に直交する向きであった。これは、フレミングの左手の法則でも示される関係である。これをベクトル形式で書くと、外積を用いて次のように書ける。

Ampère の力 (実験結果)

$$\Delta F(\mathbf{x}) = I\Delta s \times \mathbf{B}(s). \quad (3.38)$$

ただし、右辺の磁場 \mathbf{B} は自己場すなわち自分自身の電流 I が作り出す磁場は含まれていない。

3.3.3 Lorentz の力

Ampère の力を微小系で考えなおし、長さ Δx 、断面積 ΔS の導線に流れる定常電流に働く力は、

$$\Delta F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\Delta S\Delta x = \mathbf{i}(\mathbf{x})\Delta S\Delta x \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (3.39)$$

である。つまり、導線内の単位体積あたりに働く力の密度 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ は、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{i}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (3.40)$$

である。ここで、電流は電子の流れによってつくられることを明示的に示すと、 $\mathbf{i}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}$ である。ただし、 $\rho(\mathbf{x})$ は電荷密度、 \mathbf{v} は電子の速度ベクトルである。したがって、電流内の

電子に働く力で書き直すことで,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (3.41)$$

を得る. 導出過程から明らかなように, これは Ampère の力と等価である. 最後に, これまで得られていた静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ により電荷に働く Coulomb の力と合わせると, 電磁場中の荷電粒子に働く Lorentz の力が次のように得られる.

Lorentz の力 (実験結果)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x})]. \quad (3.42)$$

3.3.4 Biot-Savart の法則

上で紹介した Ampère の力は, 静磁場が定常電流に対して与える力であったが, 次は定常電流がつくる静磁場について考える. 1820 年に, J. Biot(ビオ) と F. Savart(サバル) によって, 定常電流がまわりにつくる磁場が実験的に測定された. その結果, z 軸上にある導線に定常電流を流し, z 軸から距離 R だけ離れた位置につくる磁場の大きさは次のように表せることが分かった.

電流がまわりにつくる磁場 (実験結果)

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (3.43)$$

これは, 式 (2.18) で得られた z 軸上の一様な無限長帯電棒がつくる電場:

$$E(R) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \quad (3.44)$$

と非常によく似ている. また, この導出過程を思い出すと, 微小電荷 $\lambda dz'$ がつくる微小電場:

$$dE_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \sin\theta dz'}{r^2} \quad (3.45)$$

であったから,

$$dB_R = \frac{\mu_0 I \sin\theta ds}{4\pi r^2} \quad (3.46)$$

であろうと推測できる. また, 電流と位置の関係と, 磁場の向きを考えてベクトル形式にすれば次の Biot-Savart の法則が得られる.

Biot-Savart の法則

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}. \quad (3.47)$$

しかし、微小電荷 $\lambda dz'$ を取り出した場合とは異なり、微小電流 $I ds$ は取り出せないために物理的な意味は持たない。そこで、現代的な視点では、定常電流 I が流れる導線上を積分することによって得られる表式が、物理的な意味を持つ表現であるといえる。

Biot-Savart の法則 (物理的な意味を持つ表現)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}. \quad (3.48)$$

さて、ここで改めて磁場 \mathbf{B} について考える。第 3.3.1 節で述べたように、実験的にははじめは電流間に働く相互作用が得られる。いま、電流 I_1 が距離 R 離れて平行に流れる電流 I_2 から単位長さあたりに受ける力 ΔF_{12} を求める。これは、式 (3.38) の Ampère の力と、式 (3.48) の Biot-Savart の法則によって、

$$|\Delta F_{12}| = I_1 B(R) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} \quad (3.49)$$

と書ける。ここまでくれば、静磁場の導入が静電場の導入と対応していることが理解できるはずである。静磁場は定常電流に基づいて記述されるとは、このように電流間に働く力から静磁場を分離していることを意味している。

以下で、重要な例である次の 3 つのケース：

1. 直線電流がつくる磁場
2. 円形電流がつくる磁場
3. ソレノイドがつくる磁場

の磁場の表式を、Biot-Savart の法則を用いて導出する。

▶ 3.3.4.1 直線電流がつくる磁場

z 軸上にある導線に定常電流を流し、 z 軸から距離 R だけ離れた位置につくる磁場は次のように表せる。

直線電流がつくる磁場 (実験結果)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(R) \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{e}_\phi \quad (3.50)$$

これは、もともと実験結果であり、これを再現するように構築したのが Biot-Savart の法則であるため証明はしない。ただし、電場の場合に式 (2.18) を導出したときと同様に、Biot-Savart の法則を代入することで得られる。

▶3.3.4.2 円形電流がつくる磁場

xy 平面上の原点を中心とする半径 a の円形の回路に一定の電流 I が反時計回りで流れているとする。

円形電流のつくる磁場

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z. \quad (3.51)$$

特に、電流の中心 $z = 0$ では次のように書ける。

$$\mathbf{B}(0, 0, 0) = \frac{\mu_0 I}{2a} \mathbf{e}_z. \quad (3.52)$$

証明. まずは微小電流 $I ds$ のつくる微小磁場 $d\mathbf{B}$ を考える。Biot-Savart の法則

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}. \quad (3.53)$$

について、

$$\mathbf{r} = (0, 0, z), \quad (3.54)$$

$$\mathbf{s} = (a \cos \phi, a \sin \phi, 0), \quad (3.55)$$

$$d\mathbf{s} = (-a \sin \phi, a \cos \phi, 0) d\phi, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{s} = (-a \cos \phi, -a \sin \phi, z), \quad (3.57)$$

$$d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}) = (z \cos \phi, z \sin \phi, a) a d\phi, \quad (3.58)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{s}| = (a^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi + z^2)^{1/2} = (a^2 + z^2)^{1/2}. \quad (3.59)$$

よって

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \int d\mathbf{B} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(z \cos \phi, z \sin \phi, a) a d\phi}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= (0, 0, B_z) \end{aligned} \quad (3.60)$$

ただし、

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.61)$$

である。よって1つ目の表式が得られた。

また、電流の中心の磁場を得るには、上式で $z = 0$ とすればよい。

$$B_z(z = 0) = \frac{\mu_0 I}{2a}. \quad (3.62)$$

以上より、2つ目の表式も得られた。□

▶3.3.4.3 ソレノイドがつくる磁場

単位長さあたりの巻き数が n 、半径 a の無限長ソレノイドを考える。

ソレノイドがつくる磁場

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 n I \mathbf{e}_z \quad (3.63)$$

証明. 1つの円形電流が中心軸上につくる磁場は、式 (3.51) より、

$$B_z^{(1)} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.64)$$

であった。よって、微小長さ dz には $n dz$ 個の円形電流があるから、

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} n dz \quad (3.65)$$

である。よって、無限長ソレノイドの全長で積分すると、

$$\begin{aligned} B_z &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} n dz \\ &= \frac{n \mu_0 I}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= \frac{n \mu_0 I}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{a^3 (1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{n \mu_0 I}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \mu_0 n I \end{aligned} \quad (3.66)$$

を得る。ただし、途中で $z = a \tan \theta$ において置換積分を実行した。以上により、表式が得られた。□

3.4 ベクトルポテンシャル

式 (3.48) の Biot-Savart の法則を再び少し書き換える：

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (3.67)$$

電流を $I = \int d^3x' \mathbf{i}(\mathbf{x}')$ としただけなので自明である。

ここで、静電場の場合に静電ポテンシャルを導入したときと同様、静磁場に対してはベクトルポテンシャルを導入する：

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) =: \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (3.68)$$

このときは、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (3.69)$$

と書ける。これは、

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}))_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int d^3x' \frac{i_z(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\partial}{\partial z} \int d^3x' \frac{i_y(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{i_z(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{i_y(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left[\frac{-i_z(\mathbf{x}')(y - y')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} - \frac{-i_y(\mathbf{x}')(z - z')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] \\ &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right)_x = B_x \end{aligned} \quad (3.70)$$

などにより、 y, z 成分も同様に成立する。

現在、扱っているのは古典電磁気学の範疇のため、電磁場は \mathbf{E}, \mathbf{B} によって記述され、これらが本質的な場であると考えられる。しかし、量子論まで考えると、ポテンシャル ϕ, \mathbf{A} の方がより本質的な場であることが示される。この代表的な実証例が Aharonov-Bohm (AB) 効果である。しかしながら、古典論に限ればこの AB 効果は見えなくても無矛盾であり、電磁場とポテンシャルがどちらが本質的だと考えてもよい。少なくとも Maxwell 方程式までは、電磁場は \mathbf{E}, \mathbf{B} によって記述され、ポテンシャルは補助的な場のように見える。その後、量子論に移る段階で、解析力学で得られる Euler-Lagrange 方程式にすると、ポテンシャル ϕ, \mathbf{A} を用いて記述されるようになる。このことは念頭に置いて、この先の電磁気学を学ぶとよい。

3.5 静磁場の基本法則

ここまでで、磁場を定める法則としては Biot-Savart の法則しか得られていないが、実は静磁場の基本法則が 2 つ得られる。

3.5.1 静磁場の基本法則 1

まず、磁場 \mathbf{B} は、式 (3.68) よりベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いて次のように表せた：

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) =: \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (3.71)$$

任意のベクトル場 \mathbf{A} に対して成立するベクトル解析の恒等式：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (3.72)$$

によって、

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.73)$$

を得る。静電場の場合には、 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$ だったことを思い出すと、電荷密度に対応する磁荷密度が常に存在しないことが示されている。これは、静磁場の基本法則の1つ目とできる。

また、時間変動する場合には、電場のときと同様に磁場の場合もそのまま拡張できる：

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.74)$$

3.5.2 静磁場の基本法則 2

次もまた静電場の場合との対応を考えていく。発散に関する法則が1つ目であったから、2つ目は回転に関する法則である。再び、ベクトル解析の恒等式を利用すると次のように変形できる。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A}. \quad (3.75)$$

まずは、第1項について、式 (3.69) のベクトルポテンシャルの表式を用いて、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \nabla \cdot \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \mathbf{i}(\mathbf{x}') \cdot \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \mathbf{i}(\mathbf{x}') \cdot \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left(\nabla' \cdot \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\nabla' \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x}')) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

を得る。すなわち、式 (3.75) の最右辺の第1項目はゼロとなる。ただし、上式で3つ目の等号は、 $\nabla|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1} = -\nabla'|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}$ を用いた*3。最後の等号は、 $\mathbf{i}(\mathbf{x}' \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ および定常電流の保存則： $\nabla' \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x}') = 0$ による。

続いて、

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \Delta \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \mathbf{i}(\mathbf{x}') \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\varepsilon} d^3x' \mathbf{i}(\mathbf{x}') \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_{\text{out}}} d^3x' \mathbf{i}(\mathbf{x}') \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

ここで、最後に $r := |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| < \varepsilon$ の微小領域を V_ε とし、その外部の領域を V_{out} とした。このとき、 V_{out} においては常に $r \neq 0$ より、

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{r} \right) &= \nabla \cdot \left(-\frac{(x-x')}{r^3}, -\frac{(y-y')}{r^3}, -\frac{(z-z')}{r^3} \right) \\ &= -\frac{3}{r^3} + \frac{3[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}{r^5} = 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

であるため、 V_{out} の積分はゼロになる。

残った微小領域 V_ε における積分は、 $\Delta|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1} = \Delta'|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ とした上で、微小領域であるから $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ として積分の外に出してもよい。

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\varepsilon} \mathbf{i}(\mathbf{x}') \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) d^3x' &= \frac{\mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})}{4\pi} \int_{V_\varepsilon} \Delta' \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) d^3x' \\ &= \frac{\mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) \cdot \mathbf{n}' dS \\ &= \frac{\mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})}{4\pi} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) 4\pi\varepsilon^2 = -\mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.80)$$

ただし、領域 V_ε で Gauss の定理を適用することで、その表面 S_ε の面積分に変換した。これを式 (3.78) に代入することで、

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x}) \quad (3.81)$$

を得る。最後に、式 (3.75) に戻ると、 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x})$ より、

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x}). \quad (3.82)$$

*3 ∇' とは、 ∇ の偏微分を x', y', z' に置き換えたものである：

$$\nabla' := \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'}. \quad (3.77)$$

これが静磁場の基本法則の2つ目である。これを微分形の Ampère の法則ともいう。ただし、こちらも電場のときと同様に残念ながら時間変動したときには成立せず、

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x}) \quad (3.83)$$

のように修正されることを後で見る。

3.5.3 静磁場の積分形の基本法則

静磁場の場合には、式変形によって先に微分形の表式が得られた。一方で実験的には、微小電流 \mathbf{i} などは用意できないから積分形の方が使いやすい。

まずは、定常電流を右ねじの進行方向にみなして囲む閉曲線 C と、その内部の面 S を考えて微分形の Ampère の法則： $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ を適用する。

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \, dS = \mu_0 \int_S \mathbf{i}(\mathbf{x}) \, dS, \quad (3.84)$$

$$\Leftrightarrow \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \mu_0 I. \quad (3.85)$$

ここで、左辺には式 (2.83) の Stokes の定理を利用し、右辺は断面を通過する電流 I になおした。これを積分形の Ampère の法則という。

一方で、磁場の Gauss の法則： $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ については、任意の領域 V とその表面 S に対して適用して、式 (2.57) の Gauss の定理を利用する。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \, d^3x = 0, \quad (3.86)$$

$$\Leftrightarrow \int_S \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS = 0. \quad (3.87)$$

これは、積分形の Gauss の法則という。

3.6 磁性体

静電場の際は、誘電体を考えて電束密度というものが定義された。静磁場の場合は、磁性体を考えることで磁束密度について考える。先に結論を述べると、実はこれまで扱ってきた磁場 \mathbf{B} が磁束密度である。磁荷がないことは $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ から自然法則で決まっているが、その場合にこれまで見てきたように電流を用いて記述してきたことによってこのような違いが生じている。こうした議論から、電場と磁場を比較し、次節でようやく本ノートで採用している \mathbf{E} - \mathbf{B} 対応について論じることができる。

3.6.1 磁化

静電場の場合には物質に電場を与えることによって、分極を生じ電場を弱めることが分かった。静磁場の場合には、物質に磁場を与えることによって、磁場が強められる常磁性体と、逆に磁場が弱められる反磁性体というものがある。常磁性体の中でも、鉄やニッケルなどの特に磁場を強める効果が大きい物質は強磁性体という。静磁場の基本法則、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が示す通り磁場には磁荷が存在しないため、このような性質を説明するには電流を用いる必要がある。現代的な視点でいえば、それは原子中の電子のスピンによる磁場中の振る舞いによって説明できる。一方で、ここでは古典電磁気学のみ扱うため、スピンではなく回転する微小な分子電流を考える。ここで登場する磁気双極子モーメントなどの概念を理解しないと、量子論におけるスピンの持つ磁気モーメントを理解するのが難しいはずである。

この分子電流を用いた考え方は、当時 Ampère が生み出したものである。当時知られていた現象として、ソレノイドの中に鉄を詰め込むと内部の磁場が増大するというものがあった。これを説明するために、微小な円形電流がランダムな方向を向いて原子中に存在していると考えたのである。この状態で、ソレノイドに電流を流すことによって、ソレノイド内部に磁場が生じ、そのときに分子電流が Ampère の力を受けることで方向が揃う。また、その分子電流の向きは磁場に対して右ねじの方向である。このことは次の節で示す。これを認めると、ソレノイドに流した電流（これを伝導電流という）によって揃った分子電流は、伝導電流と同じ向きで回転している。つまり、これらの分子電流がまた磁場をつくりだし、ソレノイドの磁場を増大させるのである。この現象を物質の磁化という。

次は、以上の説明の中で省いた分子電流ないしは円形電流にトルクが働いて、揃う現象を説明する。

3.6.2 円形電流に一様磁場を与えるトルク (常磁性体, 強磁性体の原理)

図 3.1 のような円形電流が一様な静磁場中にあるときに受ける Ampère の力を考える。円形電流の面は磁場に垂直な面から角度 θ だけ傾いているとする。このとき、円形電流の上に張った座標で $(a \cos \phi, a \sin \phi)$ の位置の微小電流に働く力を考える。Ampère の力から、

$$d\mathbf{F}_{\text{total}} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B} \quad (3.88)$$

で与えられる。このとき、磁場の成分は円形電流と同じ面上の磁場成分 $B \sin \theta$ と、それに垂直な磁場成分 $B \cos \theta$ に分けられる。 $B \cos \theta$ による力は円形電流の動径方向の外向きの力であり、これは円形電流の全周上で同じ力であるため釣り合う。一方で、 $B \sin \theta$ による力は、 $d\mathbf{F}$ とすると、図に示したように微小電流が流れる面を磁場に垂直にする方向に力が

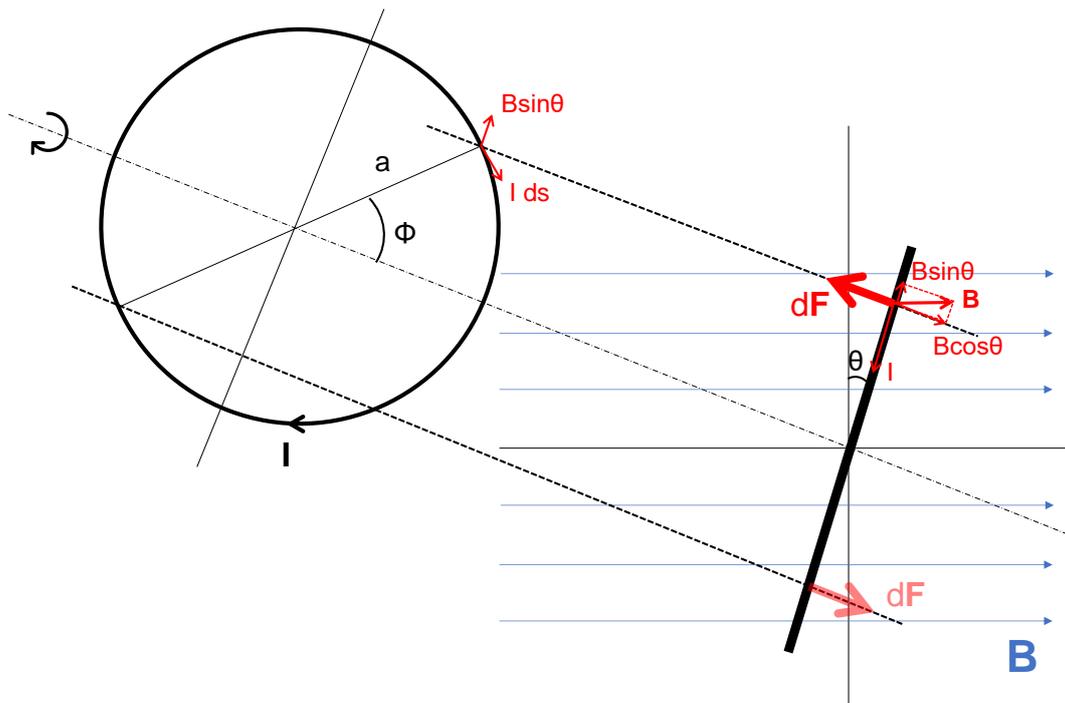


図 3.1 円形電流に働く Ampère の力

働く。この力の大きさ dF は、電流と磁場のなす角が $\pi - \phi$ であるから、

$$dF = I ds B \sin \theta \sin(\pi - \phi) = IB \sin \theta \sin \phi ds \tag{3.89}$$

と書ける。

また、先ほど考えた位置から $\phi \rightarrow \phi + \pi$ とした反対側に受ける力 dF' を考えると、

$$dF' = Ids \times B = -dF \tag{3.90}$$

を得る。電流の大きさと磁場の大きさは変わらないが、今回は側面図において裏側にある部分の電流が力を受けることになるため電流の向きが反転している。そのため、 dF' は力の大きさが dF と等しく、逆向きの力になっている。すなわち、こちらもやはり円形電流が流れる面を磁場に垂直にする方向に力が働くことになる。ちなみに、動径方向の力を合わせても $dF'_{total} = -dF_{total}$ と書ける。

最後に、この力が円形電流に与えるトルク、 $dN = r \times dF$ を考える。

$$dN = (a \sin \phi) \cdot IB \sin \theta \sin \phi ds = aIB \sin \theta \sin^2 \phi ds. \tag{3.91}$$

これを円形電流の全周にわたって積分すればよいので、 $ds = a d\phi$ とした上で $\phi : 0 \rightarrow 2\pi$

で積分を行う。

$$\begin{aligned}
 N &= \int dN = \int_0^{2\pi} aIB \sin \theta \sin^2 \phi a d\phi \\
 &= a^2 IB \sin \theta \left[\frac{\phi}{2} + \frac{1}{4} \cos 2\phi \right]_0^{2\pi} \\
 &= IB\pi a^2 \sin \theta = IB S \sin \theta
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

ただし、最後に円形電流に囲まれる面積 $S = \pi a^2$ を用いて半径 a を消去した。

このトルクが働き続けるため、いずれは円形電流の面が磁場と垂直になる。また、これは式 (3.51) などと比較すると、円形電流がつくる磁場の向きが、元々あった一様磁場の向きと等しい。すなわち、一様磁場を円形電流によってつくっているとすれば、その向きといま考えていた円形電流の向きが等しいことを意味する。前節の分子電流の話に戻すと、伝導電流と分子電流の回転の向きが等しいことを意味している。この現象によって、常磁性体と強磁性体を示す物質が存在する。

一方で、反磁性体の原理は時間変動する電磁場の現象であるため、ここではまだ取り扱えない。

3.6.3 電気双極子と磁気双極子

次に、磁荷が存在しない磁場を電流によって記述してきたことを、電場と比較して振り返る。以前、第 2.7.4 節で静電ポテンシャルの多重極展開を行うことによって、式 (2.140) で単極子、双極子、四重極子の寄与を見た。電場の場合には、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ により単極子である電荷が存在した。一方で磁場の場合には $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ によって磁荷が存在しないために、次に単純な構造は磁気双極子である。つまり、電場と磁場を比較するには、まず電気双極子と磁気双極子で比較すべきである*4。磁気双極子は、良く知っている棒磁石を想像すればよいだろう。ただし、我々はいままで磁石ではなく電流によって記述してきたので、これは棒磁石ではなく円形電流と考えるべきである。円形電流をつくと中心に磁場をつくり、その表式は式 (3.51) で与えられることを知っている。この考察に基づいて、まずは電気双極子がつくる電場と磁気双極子がつくる磁場を比較する。

▶3.6.3.1 電気双極子がつくる電場

ここは、静電場の復習であるから理解している場合は結果のみ参照されたい。

*4 とはいえ、そもそも磁荷が存在しないのであれば、磁気双極子というものもあくまで仮想的なものである。

電気双極子がつくる電場

z 軸上に距離 s だけ離れた電荷 $+q, -q$ が原点对称に置かれている場合に、これが位置 \mathbf{r} ($r \gg s$) につくる電場は球面座標系において次のように書ける。

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (3.93)$$

$$E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (3.94)$$

ただし、 $\mathbf{p} := qs$ は式 (2.143) で導入した電気双極子モーメントである。また、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^5} \right] \quad (3.95)$$

であり、式 (2.147) に一致する。

証明. まず、与えられた位置情報から静電ポテンシャルは次のように書ける。

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[(r^2 + (s/2)^2 - rs \cos \theta)^{-1/2} - (r^2 + (s/2)^2 + rs \cos \theta)^{-1/2} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r} \right) \cos \theta + \mathcal{O} \left(\frac{s^2}{r^2} \right) \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{s^2}{r^2} \right) \right) \right] \\ &\simeq \frac{qs \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

電場を求めると*5,

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}, \quad (3.98)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \quad (3.99)$$

となり、表式を得る。ただし、 $p = qs$ である。

また、電気双極子モーメントと同じ向きの単位ベクトル \mathbf{e}_p と、球面座標系の単位ベクトルの関係は、

$$\mathbf{e}_p := \frac{\mathbf{p}}{p} = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad (3.100)$$

*5 球面座標系における微分演算子 ∇ は次のように書ける。

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (3.97)$$

と表せる。よって、

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (3.101)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r \frac{1}{\tan \theta} - \frac{\mathbf{p}}{p} \frac{1}{\sin \theta} \quad (3.102)$$

であるから、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^5} \right] \quad (3.103)$$

を得る。 □

▶3.6.3.2 円形電流 (磁気双極子) がつくる磁場

続いて、磁気双極子の場合について考えたいのだが、磁場の場合は電流に基づいて考えるべきなので円形電流がつくる磁場を考えることにする。

円形電流がつくる電場

xy 平面上に置かれた半径 a の円形電流 I の中心を z 軸にとる。これが位置 \mathbf{r} ($r \gg a$) につくる磁場は球面座標系において次のように書ける。

$$B_r = \frac{2\mu_0 SI \cos \theta}{4\pi r^3}, \quad (3.104)$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 SI \sin \theta}{4\pi r^3}. \quad (3.105)$$

ただし、 $S = \pi a^2$ により円形電流に囲まれる面積 S を用いて表した。

証明. 静電場のときに静電ポテンシャルを用いたのと同様に、こちらはベクトルポテンシャルから求めるのが簡単である。式 (3.69) の表式にしたがって、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \quad (3.106)$$

と書ける。ここで、円形電流の1周にわたる線積分の結果は、球面座標系においては ϕ 方向の成分しか残らない。これは球面座標系で考えていると自明ではない。しかし、円筒座標系 (R, ϕ, z) で考えてみると分かりやすい。まず、 ϕ 方向は共通であるため積分の結果は有限の値をもつ。 z 方向は円形電流が xy 平面上にあるためゼロである。そして、 R 方向については電流の向きが1周積分の間ちょうど反対称になるため相殺されてゼロになる。以上の考察から、円筒座標系においては $A_R = A_z = 0$ である。球面座標系に戻ると、 A_r, A_θ は A_R, A_z に回転行列を作用させて表すことができるため、 $A_r = A_\theta = 0$ である。

よって,

$$\mathbf{A} = A_\phi \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds_\phi \mathbf{e}_\phi}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \quad (3.107)$$

と書ける。ここで,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{s}| &= \sqrt{((r \sin \theta)^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos(\phi - \phi')) + (r \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \end{aligned} \quad (3.108)$$

である。ここで $ds_\phi = a \cos(\phi - \phi') d\phi'$ であり, さらに $r \gg a$ を念頭に計算を進めると,

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left(1 + \left(\frac{a}{r}\right) \sin \theta \cos(\phi - \phi') + \mathcal{O}\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \right) \cos(\phi - \phi') d\phi' \\ &\simeq \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \left[-\sin(\phi - \phi') + \frac{a}{r} \sin \theta \left(\frac{\phi' - \frac{1}{2} \sin\{2(\phi - \phi')\}}{2} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} \end{aligned} \quad (3.109)$$

を得る。ここまでの、ベクトルポテンシャルは得られたので次は回転 (rot) をとることにより磁場ベクトルを求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \times A_\phi \mathbf{e}_\phi \\ &= -\mathbf{e}_\theta \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} A_\phi (-\sin \theta) \right) + \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r \sin \theta} A_\phi \cos \theta \right) \\ &= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + \frac{A_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} \right) + \mathbf{e}_\theta \left(-\frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{A_\phi}{r} \right) \\ &=: B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (3.110)$$

ただし, 上記の計算過程では, 球面座標系の単位ベクトルの性質:

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi, \quad \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\phi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi = -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta \quad (3.111)$$

を用いた。

まず B_r について計算すると,

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + \frac{A_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} \\ &= \frac{\mu_0 I \pi a^2 \cos \theta}{4\pi r^3} + \frac{\mu_0 I \pi a^2 \cos \theta}{4\pi r^3} \\ &= \frac{2\mu_0 I \pi a^2 \cos \theta}{4\pi r^3} \end{aligned} \quad (3.112)$$

となり表式を得る.

また, B_θ について計算すると,

$$\begin{aligned} B_\theta &= -\frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{A_\phi}{r} \\ &= \frac{2\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^3} - \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^3} \\ &= \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^3} \end{aligned} \quad (3.113)$$

となり表式を得る. ただし, 表式では $S = \pi a^2$ を用いている. この置き換えには意味があり, 実は円形電流に限らず任意の形状の閉じた電流について, その囲む面積を S とすると同じ表式になる.

また, 円形電流の軸方向すなわち z 軸の上を向いたベクトル \mathbf{n} を導入すると, 電気双極子のときの $\mathbf{e}_p \Leftrightarrow \mathbf{n}$ とみなすことで全く同じ対応関係になり,

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad (3.114)$$

と表せる. よって,

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r \frac{1}{\tan \theta} - \mathbf{n} \frac{1}{\sin \theta} \quad (3.115)$$

であるから,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 S I}{4\pi} \left[-\frac{\mathbf{n}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{r^5} \right] \quad (3.116)$$

を得る. 式 (3.103) と非常によく似ていることが分かる.

□

以上の考察により, 電気双極子がつくる電場と, 円形電流がつくる磁場は非常によく似ていることが分かった. そこで, この点に着目して, 本来は実在しない磁荷 q_m が存在するとする. この場合, 点磁荷 q_m がつくる磁場は Coulomb の法則より, 電場の場合と同様に,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \quad (3.117)$$

だと仮定する*6. そして, z 軸上に距離 s だけ離れた磁荷 $+q_m, -q_m$ が原点对称に置かれている場合に, これが位置 \mathbf{r} ($r \gg s$) につくる磁場は球面座標系において次のように書ける.

$$B_r = \frac{2m \cos \theta}{4\pi r^3}, \quad (3.118)$$

$$B_\theta = \frac{m \sin \theta}{4\pi r^3}. \quad (3.119)$$

*6 ここでは気にせずに仮定を受け入れてほしいが, μ_0 の扱いが不自然だと思われる場合は式 (3.134) を参照されたい.

ただし、 $\mathbf{m} := q_m \mathbf{s}$ により表される磁気双極子モーメントベクトルを用いた。上記の問題設定は電気双極子の問題と全く同じであるため、式 (3.93) と式 (3.94) からの簡単な置き換えのみで導出可能である。

一方で、この結果を円形電流の場合に得られた式 (3.104) および式 (3.105) と比較すると、以下の対応関係が得られる。

磁気双極子モーメントベクトルと閉電流 I の関係

$$m = \mu_0 SI. \quad (3.120)$$

前述の通り、一般の閉電流について囲まれる面積 S を用いて磁場の表式は同じであるため、この磁気双極子モーメントベクトルの表式も任意の形状で同じである。すなわち、面積 S の閉電流 I が遠方につくる磁場は、 $m = \mu_0 SI$ だけの磁気双極子モーメントベクトルをもつ磁気双極子がつくる磁場と等価である。またベクトル形式の式 (3.116) に基づけば、円形電流の法線ベクトル \mathbf{n} (右ねじの向き) を用いて、 $\mathbf{m} = \mu_0 SI \mathbf{n}$ と書ける。

3.6.4 磁化ベクトルと磁場の強さ

ここで、話を物質の磁化に戻す。物質中には微小な分子電流が多数存在することによって、物質の磁化が生じるのであった。つまり、磁気双極子モーメントベクトルが多数存在するとみなすこともできる。そこで、それらを平均的に扱い、単位体積あたりの磁気双極子モーメントベクトルを磁化ベクトル \mathbf{M} とする。このとき、分子電流の電流密度 \mathbf{i}_m との間に以下の関係がある。

磁化ベクトルと分子電流の関係

$$\mu_0 \mathbf{i}_m(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x}) \quad (3.121)$$

証明. これは一見、式 (3.82) から、分子電流がつくる磁場が磁化ベクトル \mathbf{M} だと思えば自明に思えるが、いまは磁化ベクトルを単位体積あたりの磁気双極子モーメントベクトルと定めているため注意が必要である。磁気双極子モーメントベクトルに基づいて定義しているので、いま使えるのは $m = \mu_0 SI$ の関係である。 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ でつくられる微小な直方体を z 方向に貫く磁化ベクトルを考える。このとき、分子電流 I_1 は xy 平面上に流れていることを意味する。すると、この平面上における磁気双極子モーメントベクトルは、

$$m_1 = \mu_0 I_1 \Delta x \Delta y \quad (3.122)$$

と書ける。一方で、磁化ベクトルはこれの単位体積あたりの平均値と定めているため、

$$\mathbf{M} = \frac{m_1}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\mu_0 I_1}{\Delta z} \quad (3.123)$$

である。ここで、 M は x のみに依存する ($M = M_z = M(x)$) ものとし、 x 方向に広がる分子電流のみを考える。この場合、 x 方向に隣り合う分子電流 I_2 とは接する辺において相殺しあうため $\Delta I = I_1 - I_2$ の電流が残り、これが磁化を引き起こす電流となる。このとき、

$$\nabla \times \mathbf{M} = -\frac{\partial M_z}{\partial x} \mathbf{e}_y \quad (3.124)$$

となる。先ほど得られた M の表式から

$$-\frac{\partial M_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0}{\Delta z} \frac{\partial I_1}{\partial x} = \frac{\mu_0 \Delta I}{\Delta x \Delta z} \quad (3.125)$$

が得られる。一方で、最右辺の $\frac{\Delta I}{\Delta x \Delta z}$ は、磁化電流 ΔI の y 方向の電流密度になっているため \mathbf{i}_m の y 成分である。以上により、 x 方向の分子電流のみを考えることで、

$$\nabla \times \mathbf{M} = -\frac{\partial M_z}{\partial x} \mathbf{e}_y = \mu_0 \mathbf{i}_m \mathbf{e}_y \quad (3.126)$$

が得られた。一般の場合の証明は大変なので、ここで証明を終える。□

証明の最初にも述べたように、この関係は一見自明にも思える。ただし、磁化ベクトルはあくまで磁気双極子モーメントベクトルの単位体積あたりの平均値として定義しているため、物質の外部では値はゼロになる。そのため、これは分子電流がつくる磁場とはみなせない。一方で、物質内部においては磁気双極子モーメントベクトルの平均値として定めた磁化ベクトル \mathbf{M} が、 $\mu_0 \mathbf{i}_m(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$ を満たし、まるで分子電流がつくる磁場 \mathbf{B} が満たす方程式に従うのである。このことに注意して、磁性体に対して Ampère の法則を適用すると、

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 (\mathbf{i}_e(\mathbf{x}) + \mathbf{i}_m) \quad (3.127)$$

によって、伝導電流 $\mathbf{i}_e(\mathbf{x})$ と分子電流 \mathbf{i}_m の合成電流からつくられるのが全体の磁場となる。しかし、式 (3.121) の関係を用いると、

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}_e(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x}) \quad (3.128)$$

と表せる。これは、誘電体のときの電場と分極ベクトルの関係式：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_e(\mathbf{x}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (3.129)$$

と対応づけられるだろう。

ここでは、

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{x})) \quad (3.130)$$

として磁場の強さ $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ を導入することによって,

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{i}_e(\mathbf{x}) \quad (3.131)$$

が得られる.

これは、電場のときに電束密度を導入して,

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (3.132)$$

の関係があったことと対比させると,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{M}(\mathbf{x}) \quad (3.133)$$

となっている. つまり, 今まで扱ってきた磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ はむしろ電束密度に対応する量であったことを意味する. 上式を見ると, \mathbf{E} と \mathbf{H} を対応づけた方が対称性が良いように見える. しかし, 本ノートでは \mathbf{E} - \mathbf{B} 対応を採用しており, 実際にこの対応の選び方は統一されていないためどちらのタイプの教科書も存在する. この点はあとでまた議論することにする.

また, 式 (3.117) において, 磁場の Coulomb の法則は,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m}{r^2}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \quad (3.134)$$

として電場と対応づけたために μ_0 の扱いが不自然だったのである.

3.6.5 磁性体中の静磁場の基本法則

実験結果から多くの磁性体では, $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{x})$ の関係があることが知られている. ここで, χ_m を磁化率という. この関係を利用すると,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (\mu_0 + \chi_m) \mathbf{H}(\mathbf{x}) =: \mu \mathbf{H}(\mathbf{x}) \quad (3.135)$$

のように透磁率 μ を用いて磁場の強さとの比例関係を表せる. 真空の場合には $\chi_m = 0$ であるから, μ_0 を真空の透磁率と呼んでいたのである.

また, Gauss の法則:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.136)$$

および, 微分形の Ampère の法則:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{i}_e(\mathbf{x}) \quad (3.137)$$

が磁性体中で成立する磁場の基本法則となる.

式 (3.135) の関係を用いれば,

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu \mathbf{i}_e(\mathbf{x}) \quad (3.138)$$

とも表せる．これを見ると，磁場 \mathbf{B} のときに現れる μ が磁場の強さ \mathbf{H} の方程式では消えており，伝導電流 \mathbf{i}_e のみで完全に決定されることを意味する．すなわち， \mathbf{H} は物質に依らない量である．

また，真空中と磁性体中の静磁場の基本法則を比べると，違いは μ_0 か μ だけであるため，この他にもこれまで真空中の場合に得られた結果に対して， $\mu_0 \rightarrow \mu$ と形式的に置き換えれば磁性体中の表式が得られる．

3.7 \mathbf{E} - \mathbf{B} 対応

ここで改めて誘電体中の電場の取り扱いと，磁性体中の磁場の取り扱いについて比較する．ここでようやく \mathbf{E} - \mathbf{H} 対応と \mathbf{E} - \mathbf{B} 対応についての議論ができる．本ノートで採用する \mathbf{E} - \mathbf{B} 対応とは， \mathbf{E} と \mathbf{B} を基本的な場として， \mathbf{D} と \mathbf{H} は，

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{M}(\mathbf{x}), \quad (3.139)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (3.140)$$

によって決まる補助的な場として扱うということである．むしろ対称性が悪化するようなこの選び方を採用する理由は大きく分けて2つある．まず1つは特殊相対性理論に進んで電磁気学を取り扱うときに相性が良いということである． \mathbf{E} と \mathbf{B} を用いて電磁場テンソルを定義して反対称テンソル場として扱うことができる．

そしてもう1つは，物理現象に基づいて電磁気学を記述するにはより本質的な場である \mathbf{E} と \mathbf{B} を用いるべきであるという思想からである．磁場の強さ \mathbf{H} とは電荷の場合と同様に，磁荷が存在するものと仮定して導入されるもののため仮想的な場である．磁場の場合には磁荷が存在しないために，磁場をつくる基本的な源は電流と考えられるのであった．この電流がつくるものは磁束密度あるいは単に磁場 \mathbf{B} であった．そして，このことと関連して実際に測定できるものは \mathbf{E} と \mathbf{B} であり，補助的な場である \mathbf{D} と \mathbf{H} は物質によらずに源によってつくられる仮想的なものである．このことを，誘電体と磁性体を思い出しながら考えよう．

まず電束密度 \mathbf{D} とは，真電荷 ρ_e によってのみ決まる場であり，磁場の強さ \mathbf{H} は伝導電流 \mathbf{i}_e によってのみ決まる場である．すなわち物質には依存しない．そこに誘電体あるいは磁性体を置くことによって，電場 \mathbf{E} は弱められ，磁場 \mathbf{B} は強め(弱め)られる．この意味で，物質中においては特に \mathbf{E} と \mathbf{B} が本質的であるといえる．

物理学の立場としては，物質によらず普遍的な量である \mathbf{D} と \mathbf{H} が本質的といえるのではないかと考えることもできる気がする．しかし，それでは置いた電荷(真電荷)や流した電流(伝導電流)によってつくられる場を計算できるだけで，実際には物質の効果により弱められたり強められたりしたものが観測されることになる．その場合，計算によって得られた

D や H はただ電荷や電流を別の量に換算して言い換えただけであり、得られるものが少ない。よって、真空中および物質中において電磁場を表すためには、やはり E と B を基本的な場として取り扱うのがよいだろうということになる。

第 4 章

時間変動する電磁場

4.1 変位電流

4.2 電磁誘導

第 5 章

Maxwell 方程式

参考文献

- [1] 砂川重信, 「理論電磁気学」, 紀伊國屋書店 (1999).
- [2] 砂川重信, 「電磁気学」, 岩波書店 (1977).
- [3] <https://www.env.go.jp/chemi/rhm/h29kisoshiryo/h29kiso-01-02-05.html>